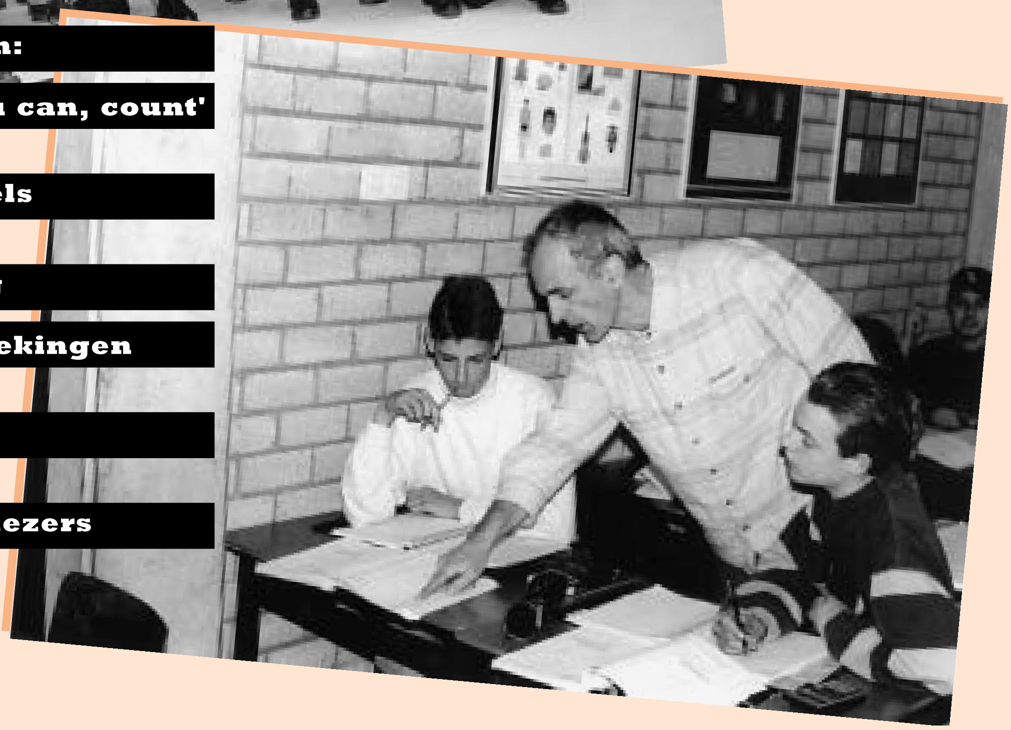
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 71
1995-1996 april/mei
7





EUCLIDES

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
Drs. J.H. de Geus
Drs. M.C. van Hoorn *hoofdred.*
J. Koekkoek
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
N.T. Lakeman
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *penningmeester*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
Mw. drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld *voorzitter*

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. C.P. Hoogland, Generaal Cronjéstraat 79 rood, 2021 JC Haarlem.
Voor meer informatie: zie ‘Richtlijnen voor auteurs’ op bladzijde 238. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-4539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden.
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten, tel. 0321-312543.
Gironummer voor contributie: 143917 t.n.v. Ned. Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Advertenties sturen naar:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg; tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht; tel. 078-6145522.

Inhoud



70

70 in Pascal's driehoek (2)

Hieronder staat een stukje uit Pascal's driehoek dat nodig is om een andere manier voor het verkrijgen van het vijfhoeksgetal 70 duidelijk te maken.

1
1 1
1 **2** **1**
1 3 **3** 1
1 4 **6** 4
1 <u>5</u> <u>10</u> 10
1 6 <u>15</u> 20
1 7 <u>21</u> 35

Om het derde vijfhoeksgetal te krijgen tel je de dik gedrukte getallen op en je vindt 12. Het zesde vind je door de onderstreepte getallen op te tellen, wat 51 oplevert. Zo geven 6 + 15 + 21 + 28 het getal 70.
Dit patroon zet zich door de hele driehoek voort.
De vijfhoeksgetallen geven nog andere patronen in de driehoek van Pascal als je begint bij 70 en schuin naar links onder verder gaat langs 126, 210, enz. In deze diagonaal geldt, te beginnen met 70, dat na 1 getal overslaan het daarop volgende een vijfhoeksgetal is. Dan 0 overslaan en weer is het een vijfhoeksgetal. Zo doorgaande volgens het patroon 1-0-1-0-1 kom je steeds een vijfhoeksgetal tegen.
Bekijk je welk rangnummer de gevonden getallen hebben dan zijn dit op het oog niets zeggende nummers, maar na enig onderzoek komt er toch een leuke serie uit. Door telkens het verschil tussen de rangnummers te nemen ontstaat het volgende patroon: 5-3-7-4-9-5-11 enz.

Sjoerd Schaafsma

Literatuur

D. Seymour
Visual patterns in Pascal's triangle
uitg. Dale Seymour Publications

'De met cijfers bedekte negentiende eeuw'

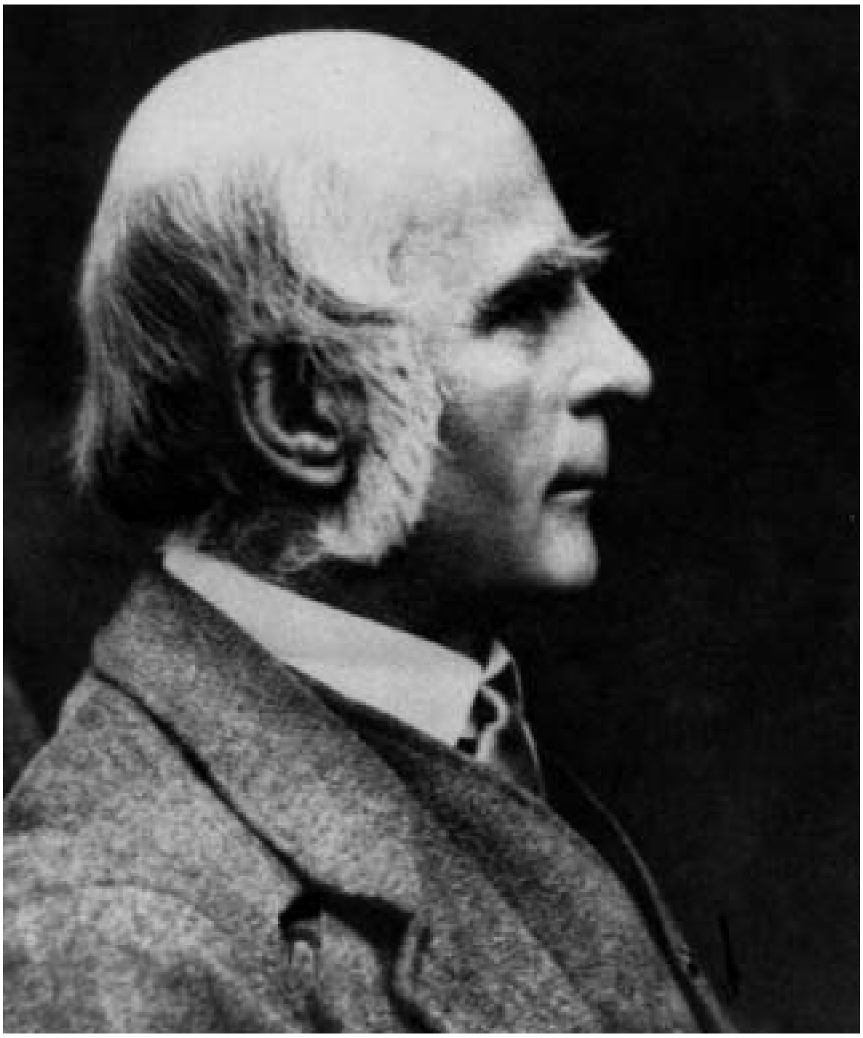
deel 4: Francis Galton: geen statistische middelmaat maar superioriteit

*Ida H. Stamhuis **

In het vierde en laatste artikel van deze serie richten we de schijnwerpers op een kleurrijke persoonlijkheid: Francis Galton (1822-1911). Hij was een van de laatste Victoriaanse geleerden, want hij had geen betaalde baan. Dat was niet nodig want hij kwam uit een rijke familie van zakenmensen en bankiers. Er wordt van hem gezegd dat hij wel een IQ van 200 gehad moet hebben en dat hij al kon lezen toen hij tweeënhalf jaar oud was. Hij was geen wiskundige, maar had wel een wiskundig georiënteerde geest. Hij was geobsedeerd door getalsmatige informatie. Eén van zijn lijfspreuken was "whenever you can, count". Zo liet hij allerlei metingen aan de mens doen, van hoofdomvang tot oogkleur.
Hij was o.a. in de schoonheid van de vrouw geïnteresseerd. Zo schijnt hij altijd een plankje bij zich gehad te hebben, waarop hij de score van de schoonheid van de vrouwen die hij tegenkwam, kon aangeven. Op grond daarvan was hij tot de conclusie gekomen dat in Engeland de Londense vrouwen het mooist en de vrouwen van Aberdeen het lelijkst waren. Ook rekende hij van iemand die een lezing hield wel eens een zogenaamde vervelingscoëfficient uit. Hij baseerde dat getal dan op het gedrag van de toehoorders tijdens zo'n lezing.

Géén gemiddelde mens

Galton bouwde voort op het werk van Quetelet. Quetelet had laten zien dat de foutenkromme uit de astronomie ook kon worden gebruikt om biologische variatie te beschrijven. Op deze wijze had de foutenkromme een veel groter toepassingsgebied gekregen. Echter de visie van Quetelet op deze kromme was daardoor niet wezenlijk veranderd. Hij beschouwde immers 'de gemiddelde mens' als het zwaartepunt van de samenleving, alles wat niet de gemiddelde waarde had moest als een afwijking van het ideale worden beschouwd. Galton nam kennis van het werk van Quetelet en was enthousiast over diens toepassing van kanstheorie en diens bredere



gebruik van de foutenkromme. Ook Galton merkte op dat vele menselijke eigenschappen volgens de Gausskromme verdeeld zijn. Echter hij was het geheel oneens met de interpretatie ervan. Hij schreef daarover: “De belangrijkste doelen van de foutenkromme van Gauss waren, in een bepaalde betekenis, precies tegengesteld aan waarop ik ze toepaste. Zij waren bestemd om zich van fouten te ontdoen, of de invloed ervan binnen de perken te houden. Echter, deze fouten of afwijkingen waren nu juist de dingen, die ik wilde bewaren en waarvan ik meer wilde weten.”
Galton beperkte de toepassing van de normale verdeling niet tot biologische menselijke gegevens. Lang voordat IQ-testen waren ontwikkeld, was Galton al tot de conclusie gekomen dat intelligentie de normale verdeling moest volgen. Hij bracht dat in 1869 als volgt onder woorden: “Dit is waar ik heen wil - dat analogie laat zien dat er bij de bewoners van de Britse eilanden een tamelijk constant gemiddeld mentaal vermogen moet zijn, en dat afwijkingen van dit gemiddelde - omhoog in de richting van genialiteit en omlaag naar domheid - aan de wet gehoorzamen die de afwijkingen van alle echte gemiddelden regeert.”
Zijn grote belangstelling voor intelligentie ging gepaard met, in onze hedendaagse ogen controversiële, standpunten. Zo was hij van mening dat Engelse vrouwen één standaarddeviatie dommer waren dan Engelse mannen, negers twee standaarddeviaties en Australische inboorlingen zelfs drie. De suggestie kan nu gewekt zijn, dat Galton vond dat hij behoorde tot de meest intelligente mensen die ooit hadden bestaan. Dat is niet helemaal waar; hij beschouwde de intelligentie van de burgers van het illustere oude Athene als, zoals hij schreef: “vrijwel twee standaarddeviaties hoger dan de onze - dat is ongeveer evenveel als ons ras zich boven dat van de Afrikaanse neger bevindt.” In die tijd was de mening vrij algemeen, dat het blanke Europese ras superieur was. Wat dat betreft was het toen niet schokkend wat hij beweerde. Het bijzondere van Galton was de wijze waarop hij de (voor)oordelen uit die tijd onder woorden bracht: in statistische termen. Dat was toen wèl nieuw. En omdat hij leefde in de ‘met cijfers bedekte negentiende eeuw’ ging er van een dergelijke formulering een grote kracht uit.

Erfelijkheid en eugenetica

Evenals voor Florence Nightingale was zijn interesse voor de statistiek een gevolg van belangstelling voor iets anders. Zijn primaire belangstelling ging uit naar evolutie en erfelijkheid. Hij was onder de indruk van de ideeën van zijn oom, Charles Darwin, die in 1859 de evolutietheorie had geformuleerd. Hij was daardoor geheel overtuigd dat het huidige planten-en dierenrijk (inclusief de mens) door evolutie was ontstaan. Galton dacht erover na hoe de evolutie kon zijn verlopen en welke erfelijkheidswetten daaraan ten grondslag zouden hebben gelegen. Zijn oom had gesuggereerd dat een *door ervaring verkregen* eigenschap aan het nageslacht kon worden doorgegeven en dat verworven eigenschappen dus erfelijk konden worden. Om dit aannemelijk te maken was Darwin met een eigen erfelijkheidstheorie op de proppen gekomen. Volgens hem werden alle eigenschappen gerepresenteerd door hele kleine deeltjes, die hij gemmules noemde. Gedurende het gehele vruchtbare leven van een organisme stroomden er uit alle delen van het lichaam

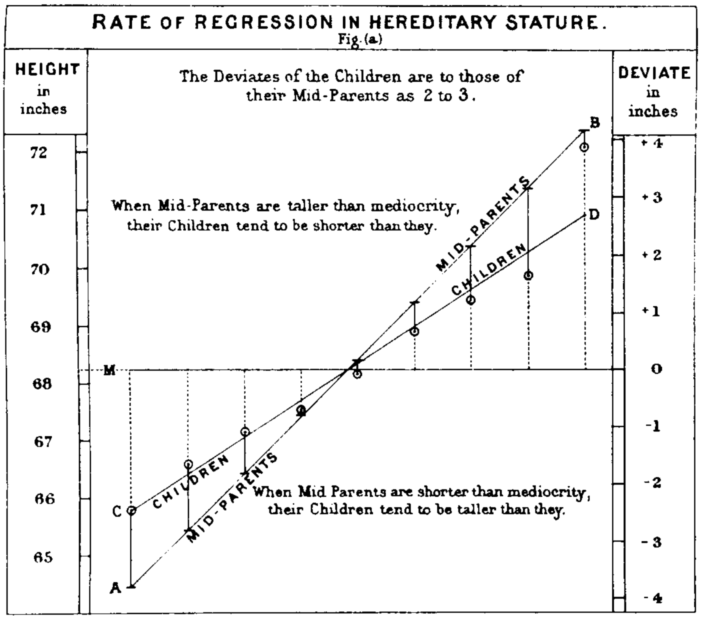
gemmules, die de recente staat van deze gedeelten van het lichaam representeerden, naar de geslachtsorganen. Deze erfelijkheidsdeeltjes werden aan het nageslacht doorgegeven en zo erfden de nakomelingen de specifieke kenmerken van de ouders. Die erfelijkheid van verworven eigenschappen kwam Galton erg onwaarschijnlijk voor. Hij stelde de theorie van zijn oom op de proef. Hij nam aan dat de gemmules bij dieren zich door het bloed zouden verplaatsen en verving van een aantal muizen het bloed door bloed van muizen van een andere kleur. De kleur van het nageslacht van deze muizen verschilde echter niet van de kleur van de ouders. Dit sterkte Galton in de overtuiging dat verworven eigenschappen niet erfelijk waren.
Darwin had de natuurlijke selectie als noodzakelijke voorwaarde van de evolutie aangewezen. Galton was dit geheel met hem eens, maar vond dat deze natuurlijke selectie bij de mens niet meer voldoende functioneerde. Hij was daarom een voorstander van eugenetische maatregelen van rasverbetering: Intelligente ouders zouden meer kinderen moeten krijgen dan zwakbegaafden. Hij had een duidelijk standpunt in de discussie die nog altijd voortduurt van 'nature versus nurture'. Hij was van mening dat erfelijkheid een veel bepalender rol speelde bij de vorming van een bepaalde eigenschap dan opvoeding en opleiding en probeerde aan de hand van getallen zijn standpunt in het nature-nurture debat te onderbouwen.

Regressie naar het gemiddelde

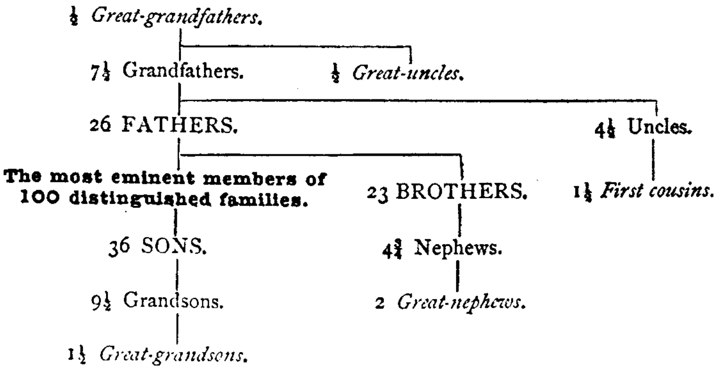
Galton vond het dus belangrijk om zijn overtuigingen met empirisch materiaal te onderbouwen. Maar hoe kwam hij aan die gegevens? Het ging hem om gegevens van menselijke verschijnselen, maar aanvankelijk zag hij geen kans om die te verzamelen. Daarom nam hij zijn toevlucht tot lathyruszaden. Ook die konden kennis over erfelijkheid opleveren. Hij maakte groepjes van zaden met hetzelfde gewicht, dus zowel relatief lichte als relatief zware zaden. Deze stuurde hij naar verschillende vrienden met het verzoek ze te zaaien, er weer zaad van te winnen en dat nieuwe zaad dan weer naar hem terug te sturen. En zo geschiedde. Galton woog al die zaden van de nakomelingen en hij merkte op dat, gemiddeld genomen, de zaden van de zeer lichte ouderzaden, dan wel niet zo licht waren dan die van de ouders, maar wel lichter dan het gemiddelde van alle zaden. Voor de zwaardere zaden gold dat het nageslacht zaden opleverde die zwaarder waren dan het gemiddelde van het totaal, maar wel lichter dan de ouderzaden. Dit verschijnsel zou later *regressie naar het gemiddelde* genoemd worden. Toen hij later dit verschijnsel ook bij de lengte van mensen opmerkte, moest hij er wel rekening mee houden dat mensen twee ouders hebben. Daartoe definieerde hij de 'mid-parental height': het gemiddelde van de lengte van de vader enerzijds en 1.08 keer de lengte van de moeder anderzijds. Ook bij deze grootheid trad regressie naar het gemiddelde op: de kinderen van heel kleine ouders waren wel klein, maar in het algemeen niet zo klein als hun ouders (zie figuur 1).
Galton had een mooi plan bedacht om aan deze menselijke gegevens te komen. Op de Internationale Gezondheids Tentoonstelling, die in 1884 in South Kensington werd gehouden, had Galton een laboratorium ingericht. Tegen een kleine vergoeding konden de bezoekers van alles aan zich laten meten: lengte, gewicht, gehoor, gezicht, gevoel voor kleuren, ademhalingskracht, spanwijdte van de armen enz.. Meer dan 9000 mensen wist hij tot meedoen te bewegen. Een enorme dataverzameling leverde dat op, waaraan hij veel van zijn ideeën kon toetsen.

Correlatie

Verder verkreeg Galton veel informatie over familiestambomen door prijzen uit te loven voor degenen die ze het best hadden bijgehouden. Ook zelf had hij al vele gegevens ver-



Figuur 1: Galtons grafische illustratie van regressie; de cirkels geven de gemiddelde lengte weer van groepen kinderen, van wie de 'midparental height' op de lijn AB ligt. Het verschil tussen de lijn CD en AB geeft de regressie naar het gemiddelde weer.



Figuur 2: Galtons illustratie van hoe het percentage eminente mannen afneemt als de afstand tot de meest eminente man in de familie toeneemt.

zameld, met name over belangrijke Engelse families, waarin veel (volgens hem) eminente mensen voorkwamen. Omdat hij in erfelijkheid was geïnteresseerd en vooral in de erfelijkheid van mentale kenmerken ging hij na in hoeverre bij eminente mannen die eminentie ook bij de zonen, de vaders, de broers en bij verdere mannelijke familieleden voorkwam. Het resulaat was dat, wanneer je 100 eminente mannen had opgespoord, hiervan er 26 ook een eminente vader moesten hebben gehad, 23 een eminente broer hadden en 36 een eminente zoon (zie figuur 2). Dat vrouwen ook eminent kunnen zijn is blijkbaar nooit in Galtons hoofd opgekomen; schoonheid was wel een kenmerk dat vrouwen konden bezitten, eminentie niet.

U kunt zich misschien wel voorstellen dat een interesse in de erfelijkheid van menselijke kenmerken, samen met een grote behoefte om een dergelijk verschijnsel in een getal weer te geven, tot het zoeken naar een of andere correlatiemaat kan leiden. Nu heeft Galton zelf niet de ons bekende definitie van de correlatiecoëfficient gegeven, maar het idee van correlatie is wel van hem afkomstig. Galton had een leerling met dezelfde genetische en eugenetische ideeën, die bovendien een knap wiskundige was, namelijk Karl Pearson. Deze heeft de ook nog tegenwoordig gebruikte definitie van correlatiecoëfficiënt gegeven. Ook verder heeft Pearson de ideeën van zijn 'eminente' leermeester geformaliseerd en in wiskundige taal gegoten. Hierdoor is de mathematische statistiek ontstaan.

Samenvatting

Wat was voor Galton statistiek? Getalsmatige gevens over grote aantallen objecten en kenmerken. Hij vond dat de principes waarop de statistiek gefundeerd behoorde te zijn, afkomstig moesten zijn uit de waarschijnlijkheidstheorie. Wat was het doel? Het ondersteunen van zijn ideeën over evolutie en eugenetica. Wat is de overeenkomst met de tegenwoordige statistiek? Galton beschouwde de rol van waarschijnlijkheidsrekening als zeer belangrijk en hij trachtte ook bij te dragen aan de vergroting van die rol.

Tot slot: de statistische negentiende eeuw

We hebben gezien dat professor Quack in 1876 zijn eeuw karakteriseerde als “de met cijfers bedekte negentiende eeuw”. We hebben dit geïllustreerd aan de hand van vier personen. **Adriaan Kluit**, de eerste hoogleraar in de statistiek in Nederland, had niet zoveel met getallen op, maar als het voor zijn statistiek of staathuishoudkunde nuttig was, maakte hij er graag gebruik van. **Adolphe Quetelet** trachtte een brug te slaan tussen de alfa-cultuur van Kluit en zijn Duitse voorgangers en de wiskundigen die zich met de toepassing van waarschijnlijkheidsrekening bezighielden. Hij ontwierp een nieuwe en kwantitatieve wetenschap, de sociale fysica, die de gemiddelde mens tot object van studie had. Ook was hij de initiatiefnemer tot het houden van internationale statistische congressen. Voor de laatste twee behandelde personen, **Florence Nightingale** en **Francis Galton** geldt, dat ze geobsedeerd waren door getalsmatige informatie en verder dat statistiek voor hen geen doel op zich was. Voor Florence Nightingale stond vermindering van de sterfte, met name onder soldaten, door betere hygiëne centraal. Zij ontwierp grafische representaties van statistische gegevens om deze zo overtuigend mogelijk over te laten komen. Door statistiek kon je het Plan van de Opperste Wijsheid ontdekken. Galtons eerste interesse was genetica en eugenetica. Hij trachtte aan de hand van statistisch materiaal te laten zien dat de meeste menselijke kenmerken, ook intelligentie, voor het grootste deel door erfelijkheid zijn bepaald. Daarom waren eugenetische maatregelen noodzakelijk om het menselijke ras niet te laten degenereren, en, nog beter, op een hoger plan te brengen.

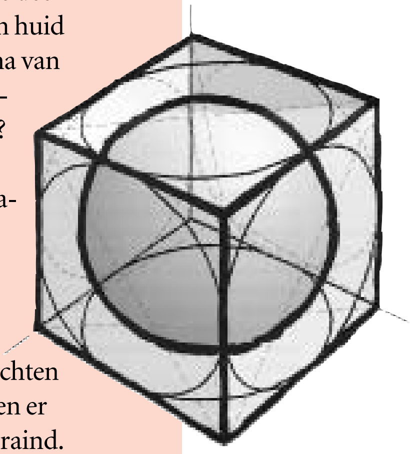
Quack was niet de enige die de

Korrel

Competitie

Al sinds jaren doet een Nederlands team mee aan de Internationale Wiskunde Olympiade.
Het afgelopen jaar eindigde de Nederlandse ploeg wederom onderin de middenmoot, ver achter landen als Vietnam, Bulgarije en Marokko.
Nederland kan zo'n Olympiade blijkbaar nooit winnen. Bij het schaken en bridgen doet Nederland het goed, maar bij de wiskunde niet.
Hoe kan dat? Niemand die het weet.
Maar: worden de Nederlandse deelnemers wel voldoende op hun huid gezeten? Bevat het programma van de Internationale Olympiade-week niet teveel ontspanning?
Al die ontspanning haalt de deelnemers uit hun concentratie. Onze leerlingen doen het examen toch ook niet tijdens hun werkweken naar Parijs?
Onze leerlingen behoren tot de achterbankgeneratie, in vechten zijn ze niet getraind. Ze hebben er recht op daarin te worden getraind.
Ten eerste moet er iets veranderen aan het programma tijdens de Olympiade-week. Het programma moet geheel in het teken van de Olympiade staan. Bij schaak- en bridge-olympiades gaat het ook uitsluitend om de medailles.
Ten tweede kan de selectie strenger. Leerlingen die na een eerste selectie geen vormbehoud tonen, gaan gewoon niet mee.
Ten derde kunnen er premies worden uitgeloofd. Het Wiskundig Genootschap kan alle Nederlandse deelnemers die een prijs halen toch best een jaar gratis studeren aanbieden?
Kortom: de Olympiades moet veel serieuzer worden aangepakt.

M. van Hoorn



negentiende eeuw op een dergelijke wijze heeft gekarakteriseerd. Aan het einde van de eeuw was er een geleerde, een zekere J.T. Merz, die een uitgebreide geschiedenis schreef van het Europese denken in die eeuw. Hierin is een lang hoofdstuk opgenomen met de titel 'On the statistical view of nature'. Hierin zegt hij "In fact we might call our century -in distinction from former centuries- the statistical century". De negentiende eeuw werd dus als de eeuw van de statistiek gekarakteriseerd. Daardoor ging er van statistische argumentaties een grote overtuigingskracht uit. Deze karakterisering van de negentiende eeuw als de eeuw van de statistiek wordt door de snelle ontwikkeling van de mathematische statistiek in de twintigste eeuw maar al te gauw over het hoofd gezien.

Literatuur over Galton

G. Gigerenzer et al
The empire of chance. How probability changed science and everyday life
(Cambridge, Cambridge University Press, 1989), blz. 53-59, en blz. 141-144.

D.A. MacKenzie
Statistics in Britain 1865-1930
The social construction of scientific knowledge
(Edinburgh, Edinburgh University Press, 1981), blz. 51-72.

T. M. Porter
The rise of statistical thinking, 1820-1900
(Princeton, Princeton University Press, 1986), blz. 128-146 en 270-296.

S.M. Stigler
The history of statistics. The measurement of uncertainty before 1900
(Cambridge, Cambridge University Press, 1986), blz. 265-299.

* Ida H. Stamhuis is werkzaam aan de Vrije Universiteit te Amsterdam.

Enkele lessen getaltheorie
Les 1: Getallenstelsels

R. Tijdeman

Inleiding

De commissie vwo-B wiskunde heeft in het voorbeeld van een mogelijk programma in haar rapport ook getaltheorielessen opgenomen. De redactie heeft me gevraagd enkele getaltheorielessen te schrijven over materiaal dat ik voor het vwo-B geschikt acht. Dit is de eerste van vier lessen. De les is voor leraren geschreven; uitwerking hangt van kennis en niveau van de leerlingen af. Bewust is gepoogd fundamentele begrippen centraal te stellen en beweringen te beredeneren.
Het eerste onderwerp, dat niet expliciet in het programma van de commissie vwo-B voorkomt, is oud, maar actueel. Computers rekenen binair en inzicht in verschillende getallenstelsels leidt tot een beter begrip van de decimale schrijfwijze van getallen. Terloops worden op een vrij intuïtieve manier begrippen geïntroduceerd die een belangrijke rol spelen in de informatica (zoekalgoritme, transformatie door substituties, complexiteit van algoritme, bit), terwijl enkele fundamentele wiskundebegrippen op een natuurlijke wijze gebruikt worden (logaritme, deling met rest, ongelijkheden). De beweringen worden op een elementair niveau verklaard; er wordt geen gebruik gemaakt van volledige inductie en van sommen van meetkundige rijen. Het spelelement vergemakkelijkt een gedachtenuitwisseling. Er zijn vele vraagstukken over het onderwerp te maken, zonder en met gebruik van de zakrekenmachine. Zo is goed na te gaan of leerlingen nog bij de les zijn. In tegenstelling tot de andere lessen zou deze les in aangepaste vorm ook passen in het Algemene deel van het Wiskundeprogramma voor de bovenbouw van het vwo.

Een spel

Ik heb een getal onder de duizend in gedachten. Met een getal bedoel ik in deze les een geheel getal dat niet negatief is. Jullie moeten dat getal zoeken door middel van vragen waarop alleen ‘ja’ of ‘nee’ geantwoord kan worden. De kunst is natuurlijk om dat met zo min mogelijk vragen te doen. Eén manier is om te vragen: is het 0?, is het 1?, is het 2?, ..., tot het antwoord ja is. Dan weten jullie het getal, maar als jullie pech hebben, hebben jullie 1000 vragen gesteld. Het gaat om een slimme strategie. (Dit spel kan een paar keer gespeeld worden. In plaats van met 1000 kan met 100 gestart worden. Als een goede onsystematische strategie ontdekt is, kan de grens tot 10 000 of 1 000 000 opgehoogd worden om de leerlingen te dwingen systematisch te worden.)

Stel dat je een getal onder de duizend moet vinden. Aan hoeveel vragen heb je dan zeker genoeg? We weten dat 1000 vragen genoeg is. Kan je het altijd met 100 vragen vinden? Kan je het altijd met 10 vragen vinden? De volgende redenering laat zien dat je niet altijd aan 9 vragen genoeg hebt. Stel je hebt n vragen nodig. Om zeker te weten dat het een bepaald getal is, moet voor elk getal onder de 1000 de antwoordenreeks anders zijn, want twee getallen waarvoor alle antwoorden hetzelfde zijn kan je niet onderscheiden. Met elke vraag verdubbelt het aantal mogelijke antwoordenreeksen: met 1 vraag zijn er 2, met 2 vragen $2 \times 2 = 2^2$, met 3 vragen $2^2 \times 2 = 2^3$ en met n vragen $2n$ antwoordenreeksen mogelijk. Om alle getallen tot 1000 te onderscheiden, moet dus $2n \geq 1000$. Het kleinste getal dat hieraan voldoet is $n = 10$. Dus zijn tenminste 10 vragen nodig. De vraag is nu natuurlijk of er een strategie is waarbij je altijd aan 10 vragen genoeg hebt.

Minimale oplossingen

Een strategie (die de leerlingen zelf kunnen ontdekken of benaderen) die voldoet is de volgende:
verdeel het interval [0, 1000) in twee gelijke stukken en vraag: ligt het getal in het eerste stuk? Dat is [0, 500). Na het eerste antwoord weet je een interval van lengte 500 waar het getal in ligt. Splits dat interval in twee stukken van lengte 250 en herhaal de vraag. Na het tweede ant-

woord ken je een interval van lengte 250 waar het gezochte getal in ligt. Bij elk volgend antwoord wordt de lengte gehalveerd. Na 3 antwoorden is de lengte 125, na 4 is het $62\frac{1}{2}$, na 5 minder dan 32, na 6 minder dan 16, na 7 minder dan 8, na 8 minder dan 4, na 9 minder dan 2, na 10 minder dan 1. Een interval met lengte kleiner dan 1 bevat niet meer dan één getal. Dus na 10 vragen weten we het getal.

Een nadeel van bovenstaande methode is dat er vervelende breuken optreden. Dat kunnen we vermijden door het interval eerst te vergroten tot de lengte een macht van 2 is, bij 1000 dus $1024 = 2^{10}$. We starten met de splitsing van [0, 1024) in twee intervallen van gelijke lengte, dus [0, 512) en [512, 1024) en vragen: 'ligt het getal in het eerste interval'. Is het antwoord 'nee', dan schrijven we 512+ op en zeggen 'trek 512 van het getal af'. Zodoende werken we ook bij de volgende stap met een interval met beginpunt 0. Het getal dat we nu nog moeten vinden ligt in het interval [0, 512). Vervolgens splitsen we het interval weer in twee intervallen die even lang zijn, [0, 256) en [256, 512). We vragen: 'ligt het getal in het eerste interval?' Is het antwoord 'nee', dan schrijven we 256+ op en zeggen 'trek 256 van het getal af'. Zo doorgaande vinden we het gevraagde getal met 10 vragen zonder breuken te hoeven gebruiken. Laat dit een paar keer oefenen. (Als het goed gaat, kan ook een keer met een getal onder het miljoen geoefend worden.)

Binaire notatie

We voeren een verkorte notatie in. Als het antwoord 'ja' is, schrijven we een 0 op, als het antwoord 'nee' is een 1. Dus voor $712 = 512 + 128 + 64 + 8$ schrijven we 1011001000 en voor 41 schrijven we 0000101001. Het eerste getal is dus $1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^3 = 712$ en het tweede is $2^5 + 2^3 + 2^0 = 41$. De plaats waar een 1 staat bepaalt zijn waarde. Welk getal wordt voorgesteld door 1001010010? En welk door 0000111011? We kunnen de waarde van een 1 bepalen door zijn plaats van achter af te tellen. Daarom kunnen we, als we dat wensen, voor het laatste getal ook 111011 schrijven. We noemen dit de *binaire* schrijfwijze van een getal. De *binaire* schrijfwijze van een getal bevat alleen nullen en enen, maar het aantal cijfers is veel groter dan in de gebruikelijke (decimale) schrijfwijze. Zo telt 41 twee cijfers en 712 drie, maar de binaire schrijfwijze van deze getallen bestaat uit respectievelijk zes en tien cijfers. In de geheugens van computers worden getallen meestal in binaire schrijfwijze opgeslagen.

Meer antwoorden

Merk op dat het niet belangrijk is dat de antwoorden 'ja' en 'nee' zijn. We kunnen ook afspreken dat 'rood' of 'blauw' geantwoord wordt, want dan kunnen we afspreken dat 'rood' voor ja of 'blauw' voor nee staat. Essentieel is dat er maar twee antwoorden toegelaten worden, preciezer gezegd: twee reacties toegelaten zijn (niets antwoorden telt ook mee als antwoord). Laten we het spel zo veranderen dat er telkens tien verschillende antwoorden mogelijk zijn. We kunnen de tien antwoorden zelf kiezen en voor het gemak nemen we als mogelijke antwoorden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Omdat $1000 = 10^3$ hebben we nu aan drie antwoorden genoeg: verdeel [0, 1000) in tien intervallen van lengte 100. Dan komt het interval overeen met het eerste cijfer. De eerste vraag kan dus zijn: 'wat is het hondertal'? Als we afspreken dat we de getallen van minder dan drie cijfers met nullen ervoor aanvullen tot drie cijfers, kunnen we ook vragen: 'wat is het eerste cijfer?' Trekken we dit cijfer vermenigvuldigd met honderd van het getal af, dan houden we een getal van twee cijfers over, en de volgende vraag wordt: 'wat is het tweede cijfer?' De laatste vraag wordt: 'wat is het derde cijfer?' We hebben hetzelfde gedaan als bij twee mogelijke antwoorden, maar omdat we getallen in het tientallig stelsel schrijven, waren we snel klaar. Als de antwoorden 7, 0, 9 waren, was het getal $7 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 709$.

Tien is geen bijzonder getal, behalve uit menselijke overwegingen. Dat we getallen tientallig schrijven heeft zeer waarschijnlijk te maken met het feit dat de meeste mensen tien vingers hebben. Maar het spel kan gespeeld worden met elk aantal antwoorden groter dan 1 (als maar één antwoord toegelaten is, geeft dat antwoord geen informatie). Laten we het spel eens spelen met drie toegestane antwoorden die we 0, 1 of 2 noemen. De kleinste macht van 3 die groter dan of gelijk aan 1000 is, is $3^7 = 2187$. We hebben dus zeven vragen nodig. Stel we hebben het getal 899 in gedachten.
De eerste vraag is: 'ligt het getal in het interval $[0, 3^6)$, $[3^6, 2 \times 3^6)$ of $[2 \times 3^6, 3 \times 3^6)$?' Het is het middelste interval en we noteren dus een 1. We trekken $3^6 = 729$ van 899 af en houden 170 over. Met 170 werken we verder. Nu is de vraag: 'ligt de rest in het interval $[0, 3^5)$, $[3^5, 2 \times 3^5)$ of $[2 \times 3^5, 3 \times 3^5)$?' Omdat het getal 170 in het eerste interval ligt, noteren we een 0. Aldus voortgaande krijgen we de rij antwoorden 1, 0, 2, 0, 0, 2, 2. Het getal was dus $1 \times 3^6 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3 + 2$. We zeggen dat 1020022 de drietallige schrijfwijze van 899 is. Zo kan je van elk getal de drietallige schrijfwijze bepalen.
Op eenzelfde wijze kunnen we ook de vijftallige of de zeventallige of de zestientallige schrijfwijze van een

getal berekenen. Bij een g-tallige schrijfwijze hebben we dus g verschillende cijfers. Als in het zestientallige stelsel gewerkt wordt, wordt meestal gewerkt met de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (is tien), B (is elf), C (is twaalf), D (is dertien), E (is veertien) en F (is vijftien). In het zestientallige stelsel staat AB dus voor $10 \times 16 + 11 = 171$ en ABC voor $10 \times 16^2 + 11 \times 16 + 12 = 2748$.

Opgave 1
Ga na dat 1234 in het binaire stelsel geschreven wordt als 10011010010, in het viertallig stelsel als 103102, in het achttallig stelsel als 2322 en in het zestientallig stelsel als 4D2.

Vragen
Zie je verband tussen deze schrijfwijzen? Zie je verband tussen het aantal cijfers van de schrijfwijzen?

Antwoord op de vragen
Beschouw de viertallige schrijfwijze 103102, dat wil zeggen $1 \times 4^5 + 3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 2$. Dit is te schrijven als $1 \times 2^{10} + (2 + 1) \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 2 \times 1$ en dit is gelijk aan $2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2$, dus 10011010010, binair geschreven. Het komt er dus op neer dat elke 0 door 00, elke 1 door 01, elke 2 door 10 en elke 3 door 11 vervangen wordt. De binaire schrijfwijze telt dus ongeveer tweemaal zoveel cijfers als de viertallige schrijfwijze. Soortgelijke transformaties door substituties zijn mogelijk als het ene grondtal een macht is van het andere, in bovenstaande opgave dus tevens voor binair en achttallig, binair en zestientallig, en viertallig en zestientallig.

De zoektijd

We beschouwen het spel voor een te raden getal n onder een gegeven grens B, met g mogelijke antwoorden per vraag. Als we vragen: is het 0? is het 1?, enzovoorts hebben we maximaal B vragen nodig. Als voor vraag en antwoord 5 seconden nodig zijn, kost dat dus $5B$ seconden. We weten nu hoe we dat getal kunnen raden met m vragen en antwoorden waarbij m het aantal cijfers van B in het g-tallige stelsel is. Die m voldoet aan de ongelijkheid $g^{m-1} < B \leq g^m$, ofwel $(m - 1)\log g < \log B \leq m \log g$ of $m - 1 < \dfrac{\log B}{\log g} \leq m$.

We zien dat m het kleinste gehele getal is dat groter is dan of gelijk aan $\dfrac{\log B}{\log g}$. We moeten $\dfrac{\log B}{\log g}$ dus naar boven afronden. Dat getal noteren we als $\dfrac{\lceil \log B \rceil}{\log g}$.

Is bijvoorbeeld $B = 1.000.000$ en bovendien $g = 2$, dan zouden we met de aftelvragen hoogstens 5.000.000 seconden nodig hebben, dat is bijna twee maanden, dag en nacht doorvragend. Door slim vragen te stellen redden we het met 20 vragen, dus in 100 seconden, dat is minder dan twee minuten.

Een oplossing voor een probleem over getallen $< B$ noemen we *lineair* als het opgelost kan worden in tijd $c \log B$ waarbij c een positieve constante is, dus in tijd evenredig met het aantal cijfers van B, hoe groot B ook is. Voor ons spel bestaat dus een lineaire oplossingsmethode. Lineaire oplossingsmethoden zijn ideaal. Problemen met grote getallen worden bij voorkeur aangepakt met een lineaire oplossingsmethode.

Snelle bepaling binaire schrijfwijze

In plaats van de cijfers van de binaire ontwikkeling van een getal van links naar rechts te bepalen is het mogelijk die cijfers van rechts naar links te bepalen. Met de hand rekenend gaat dit als volgt:
Deel het getal door 2 met rest als bij een staartdeling en schrijf de rest op. Herhaal dit tot 0 overblijft.

Voorbeeld 1

1234	0	dat wil zeggen	$1234 = 2 \times 617 + 0$
617	1		$617 = 2 \times 308 + 1$
308	0		$308 = 2 \times 154 + 0$
154	0		enzovoorts
77	1		
38	0		
19	1		
9	1		
4	0		
2	0		
1	1		
0			

Hieruit concluderen we dat de binaire schrijfwijze van 1234 gelijk is aan 10011010010. Dat dit juist is, is achteraf gemakkelijk te controleren.
De waarde is $2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2 = 1234$.

Het proces is met de zakrekenmachine te imiteren (trek 1 af als het getal oneven is en deel door 2). Het kan echter nog vlugger. We hoeven niet af te trekken als we niet letten op de cijfers achter de punt. Het is dus voldoende telkens te kijken of het laatste cijfer vóór de punt even is en dan door 2 te delen.

Voorbeeld 2

1234	0	want 4 is even
617	1	want 7 is oneven
308.5	0	want 8 is even
154.25	0	enzovoorts
77.125	1	
38.5625	0	
19.28125	1	
9.640625	1	
4.8203125	0	
2.41015625	0	
1.20507813	1	We stoppen hier,
0.60253906		want hierna zou
		steeds 0 voor de . staan

Merk op dat vóór de punt hetzelfde rijtje getallen staat als bij de berekening met de hand.

Dat we zo de binaire ontwikkeling vinden kan als volgt verklaard worden.
Laat $a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_0$ de binaire schrijfwijze van n zijn, dus

$$n = a_{m-1}2^{m-1} + a_{m-2}2^{m-2} + \ldots + a_0, \text{ met alle } a\text{'s } 0 \text{ of } 1$$

Laat k een getal kleiner dan m zijn. Dan is $a_{k-1}2^{k-1} + a_{k-2}2^{k-2} + \ldots + a_0$ een getal in het interval $[0, 2^k)$ en dus kleiner dan 2^k. Als we k keer door 2 gedeeld hebben, hebben we door $2k$ gedeeld en beschouwen we dus het getal

$$\frac{n}{2^k} = a_{m-1}2^{m-1-k} + a_{m-2}2^{m-2-k} + \ldots + a_{k+1}2 + a_k + \frac{a_{k-1}2^{k-1} + \ldots + a_0}{2^k}$$

De breuk ligt in het interval [0, 1), terwijl de andere termen geheel zijn. Als we naar het stuk vóór de punt kijken, doet de breuk dus niet ter zake. Bij het met de hand rekenen laten we dit stuk dan ook weg. Het gehele deel kunnen we schrijven als

$$2(a_{m-1}2^{m-2-k} + a_{m-2}2^{m-3-k} + \ldots + a_{k+1}) + a_k$$

Tussen haakjes staat een geheel getal (als $k = m - 1$ staat er een lege som; deze heeft de waarde 0.) Met 2 vermenigvuldigd levert dit een even getal. Verder is a_k òf 0 òf 1. Als het getal vóór de punt even is, is a_k dus 0; als het oneven is, is a_k dus 1. Door telkens door 2 te delen, kunnen we zo achtereenvolgens $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ aflezen.

Voor de liefhebbers

De methode die we voor binaire ontwikkelingen gegeven hebben is toepasbaar voor elk grondtal g.

Voorbeeld 3

We berekenen de 7-tallige schrijfwijze van 1234.

1234	2	want	1234	=	$176 \times 7 + 2$
176	1	want	176	=	$25 \times 7 + 1$
25	4	want	25	=	$3 \times 7 + 4$
3	3	want	3	=	$0 \times 7 + 3$
0					

Dus de zeventallige schrijfwijze van 1234 is 3412.
(Controle: $3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 1 \times 7 + 2 = 1234$)

Met de zakrekenmachine gaat het niet zo eenvoudig als in het binaire geval, omdat we niet onmiddellijk kunnen zien wat de rest bij deling door 7 is. We kunnen het delen met rest wel imiteren (deel door g, trek het gehele deel af en onthoud dit, vermenigvuldig nu weer met g dan is dit de rest). Als we de rest door g delen, krijgen we een waarde in het interval [0, 1). Rest 0 correspondeert met het interval $[0, 1/g)$, rest 1 met interval $[1/g, 2/g)$ enzovoorts. Daarom delen we een keer extra door g aan het begin en kijken telkens in welk interval het stuk achter de punt ligt:

Voorbeeld 4

1234	
176.28571	achter de komma staat $\frac{2}{7}$, dus rest is 2
25.183672	achter de komma ligt in $[\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$, dus rest is 1

<u>3</u>.5976674	achter de komma is in $[\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$, dus rest is 4
0.5139524	achter de komma is in $[\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, dus rest is 3

Opgave 2
Toon met een redenering over *g*-adische ontwikkelingen aan dat op deze manier de *g*-adische ontwikkeling van een getal gevonden wordt.

Rekenen met binaire getallen

Zoals eerder opgemerkt rekenen computers het snelst met getallen binair geschreven. Weliswaar is het aantal *bits* van een getal, dat is het aantal cijfers bij binaire schrijfwijze, ruim drie maal zo groot als het aantal decimale cijfers, maar het optellen en vooral het vermenigvuldigen is veel eenvoudiger. Voor optellen geldt $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 10$, dat wil zeggen 0 opschrijven en 1 onthouden. In plaats van de tafels van vermenigvuldiging is het voldoende te weten dat $0 \times 0 = 0, 0 \times 1 = 0, 1 \times 0 = 0, 1 \times 1 = 1$. Binair rekenen gaat verder als decimaal rekenen.

Voorbeeld 5

We tellen 1234 en 712 binair op:

```
1234 →  10011010010
712  →   1011001000 +
        11110011010   →
```

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2 = 1946$$

Voorbeeld 6

We vermenigvuldigen 1234 en 41 binair

```
1234 →        10011010010
  41 →             101001
              10011010010
           10011010010...
        10011010010..... +
        1100010110100010   →
```

$$2^{15} + 2^{14} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 = 50594$$

De volgende uitbreidingen lenen zich voor extra opgaven.

3 Wat gebeurt er met het spel als het aantal toegelaten antwoorden op een vraag niet meer constant is, maar per vraag wisselt? Welke representaties worden zo gemaakt? Hoeveel getallen kunnen nu met een bepaald aantal vragen worden teruggevonden?

4 Bereken hoeveel tijd maximaal nodig is voor het spel als B een miljard is en als $B = 10^{100}$ is, zowel voor het aftellen als voor gebruik van de binaire schrijfwijze.

5 Werk het rekenen met binaire breuken uit. Welke breuken hebben een eindige binaire ontwikkeling? Kan je bewijzen dat elke breuk een eindige of periodieke ontwikkeling heeft? Hoe gaat het optellen of vermenigvuldigen van breuken?

6 Laat zien hoe het optellen en vermenigvuldigen gaat in het drietallig (of ander-tallig) stelsel.

Samenvatting

In zijn eerste les getaltheorie behandelt de auteur getallenstelsels. Aan de hand van een eenvoudig raadspel geeft hij een inleiding op de binaire en andere schrijfwijzen voor gehele getallen. Met name de binaire en hexadecimale (16-tallige) schrijfwijze kennen hun toepassing in de informatica. Tevens beschrijft de auteur een zoekalgoritme, dat in veel computerprogramma's terug te vinden is. De zoektijd is daarbij evenredig met de logaritme van de omvang van de gegevensverzameling waarin gezocht wordt. Tenslotte besteedt de auteur aandacht aan de vraag hoe van een getal de binaire of een andere schrijfwijze met en zonder rekenmachine bepaald kan worden en hoe eenvoudig het is met binair genoteerde getallen te rekenen.

In 1995 werd de 36e Internationale Wiskunde Olympiade gehouden van 13 tot 25 juli in Toronto, Canada. Er waren 412 deelnemers uit 73 landen.

De XXXVIe Internationale Wiskunde Olympiade 1995

J.G.M. Donkers



Eén van de zalen met puzzelende deelnemers.

De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Johan Bosman (16) Renkum
Dion Gijswijt (17) Almere
Otto van Hemert (17) Bilthoven
Erik Kieft (18) Kesteren
Jan Willem Knopper (18) Nijverdal
Ronald van Luyk (18) Voorschoten

Erik en Ronald ontvingen een bronzen medaille (3e prijs), *Dion* een eervolle vermelding. (Degenen die buiten de prijzen vallen maar wel voor tenminste één opgave de maximale score van 7 punten hebben behaald krijgen een eervolle vermelding.)

De wedstrijd vond plaats op 19 en 20 juli in de gebouwen van York University. De deelnemers kregen op beide dagen $4\frac{1}{2}$ uur voor drie opgaven. Van de 412 deelnemers kregen er 201 een prijs (medaille + oorkonde); 30 goud (37 t/m 42 punten), 71 zilver (29 t/m 36 punten) en 100 brons (19 t/m 28 punten). Er waren 14 deelnemers met de maximale score van 42 punten. In het officieuze landenklassement kwam China op de eerste plaats met 236 punten, gevolgd door Roemenië en Rusland met resp. 230 en 227 punten. Nederland was 45e met 85 punten.
Tijdens de slotbijeenkomst nodigde de vertegenwoordiger van India alle landen uit in 1996 aanwezig te zijn bij de 37e Olympiade in New Delhi.

De Nederlandse ploeg

In de tabel hiernaast staan de scores van de Nederlandse deelnemers.

Vier leden van de Nederlandse ploeg hebben dit jaar eindexamen vwo gedaan en gaan wiskunde en/of natuurkunde studeren aan een universiteit. De overigen zitten nu in klas 6 van het vwo.
Evenals voorgaande jaren werd ook nu de ploeg begeleid door drs. J.M. Notenboom (HvU) en drs. J.G.M. Donkers (TU Eindhoven).

Hoe is de Nederlandse ploeg tot stand gekomen?

	Opgaven						
	1	2	3	4	5	6	Totaal
Johan Bosman	2	0	2	0	2	0	6
Dion Gijswijt	7	0	0	2	7	0	16
Otto van Hemert	1	0	1	0	2	0	4
Erik Kieft	7	0	3	7	7	0	24
Jan Willem Knopper	1	0	1	5	0	0	7
Ronald van Luyk	7	0	6	7	7	1	28
	25	0	13	21	25	1	85



d.m.v. lesbrieven. Tenslotte was er in de eerste week van juni nog een vijfdaags trainingskamp. Direct na het laatste kamp werd de samenstelling van de ploeg bekend gemaakt. De trainingskampen worden ieder jaar gehouden in de jeugdherberg in Valkenswaard. Een belangrijk deel van de trainingsactiviteiten tijdens deze kampen en van de organisatie is in handen van oude olympiadewinnaars. Dit jaar waren dat: Ronald de Man (AIO, TUE), Wim Oudshoorn (student UvA) en Sander van Rijnswou (student TUD).

Rondom de olympiade

In Toronto logeerden we op de campus van de York University. Dit is een moderne universiteit met een prachtige campus, die zich bevindt aan de rand van de stad. Alle leerlingen hadden een eigen kamer en konden gebruik maken van de uitgebreide sportfaciliteiten. Ook kregen alle leerlingen een computeraccount en password

Uit de 2250 deelnemers aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1994 (afkomstig van 212 scholen) werden de 88 beste toegelaten tot de tweede ronde die in september 1994 gehouden werd aan de Technische Universiteit in Eindhoven. De beste zestien van de tweede ronde kregen een uitnodiging om deel te nemen aan de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade.
De training, die evenals voorgaande jaren werd verzorgd door J. Donkers, begon met een trainingsweekend in november ‘94 en werd vervolgd



Verbroedering: de Nederlandse ploeg en de ploeg uit Thailand. De Nederlanders op de achterste rij zijn: Dion, Johan, Jan Willem, Ronald en Otto; op de voorste rij links: Erik.

waarmee ze gebruik konden maken van de computers die dag en nacht beschikbaar waren en waarmee ze toegang hadden tot onder andere E-mail en ‘World Wide Web’. Er zijn vele contacten gelegd met leerlingen uit andere landen. Vooral het studentencafé op de campus was ’s avonds een geliefde plek. We hebben vele mooie excursies gemaakt, o.a. naar het Ontario Science Museum, de Sky Dome, het grote baseball stadion, en de CN-tower, de ‘hoogste toren ter wereld’. Maar van alle excursies heeft die naar de Niagara Falls de meeste indruk gemaakt. Onvergetelijk was de boottocht die we hebben gemaakt tot vlak bij de waterval.
Tenslotte was er de prijsuitreiking in een van de mooiste zalen van Toronto, de Roy Thomson Hall, met daaropvolgend het afscheidsdiner in het statige, nog uit de vorige eeuw daterende, Royal York Hotel.

Hierna volgen nog het landenklassement en de opgaven.
De zes opgaven zijn afkomstig van achtereenvolgens Bulgarije, Rusland, Tsjechië, Polen, Nieuw-Zeeland en Polen.

Sinds kort is uitgebreide informatie omtrent de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) te verkrijgen via het World Wide Web onder: http://www.fujitsu.co.jp/math_olympiad

▼ Lees verder op pag. 252

Het landenklassement

1	China	236	38.	Columbia	100
2	Roemenië	230	39.	Letland	97
3	Rusland	227	40.	Zwitserland (5)	97
4	Vietnam	220	41.	Zuid-Afrika	95
5	Hongarije	210	42.	Mongolië	91
6	Bulgarije	207	43.	Oostenrijk	88
7	Zuid-Korea	203	44.	Brazilië	86
8	Iran	202	45	Nederland	85
9	Japan	183	46	Nieuw-Zeeland	84
10	Engeland	180	47	België	83
11	Verenigde Staten	178	48	Georgië	79
12	Taiwan	176	49	Denemarken	77
13	Israël	171	50	Litouwen	74
14	India	165	51	Spanje	72
15	Duitsland	162	52	Noorwegen	70
16	Polen	161	53	Indonesië	68
17	Tjechië	154	54	Griekenland	66
18	Joegoslavië	154	55	Cuba (4)	59
19	Canada	153	56	Estland	55
20	Hongkong	151	57	Kazachstan	54
21	Australië	145	58	Cyprus	43
22	Slowakije	145	59	Mexico	43
23	Oekraïne	140	60	Slovenië (5)	42
24	Marokko	138	61	Ierland	41
25	Turkije	134	62	Macao	33
26	Wit-Rusland	131	63	Trinidad & Tobago	32
27	Italië	131	64	Azerbeidzjan (3)	30
28	Singapore	131	65	Kirgizië	28
29	Argentinië	129	66	de Filippijnen	28
30	Frankrijk	119	67	Portugal	26
31	Macedonië	117	68	IJsland (4)	19
32	Armenië	111	69	Bosnië-Herzegowina	18
33	Kroatië	111	70	Chili (2)	14
34	Thailand	107	71	Sri Lanka (1)	10
35	Zweden	106	72	Maleisië (2)	1
36	Finland	101	73	Koeweit (2)	0
37	Moldavië	101			



Aankondiging

Workshop 'Propaedeutische wiskunde' in de negentiende eeuw 26, 27 en 28 juni 1996 Katholieke Universiteit Nijmegen

Georganiseerd door de vakgroep wiskunde van de KUN en het landelijk werkcontact GMFW. Onder voorzitterschap van prof. dr. A.C.M. van Rooij (voorzitter vakgroep wiskunde KUN) en met bijdragen van o.a. prof. dr. Gert Schubring (Universität Bielefeld) en drs. Harm Jan Smid (T.U. Delft)

Met de opzet van het Polytechnisch onderwijs rond 1800 kreeg de wiskunde een nieuwe maatschappelijke functie te vervullen: voorbereiding op het ingenieursonderwijs door de vorming van het verstand. Onder andere werd onderwijs in de "beginselen der wiskunde" verplicht (!) aan de middelbare scholen. Daarnaast deed de overheid in toenoemende mate een beroep op wiskundigen, vaak ook met problemen die niet wiskundig van aard waren. De mening van de wiskundige werd in dezen blijkbaar op prijs gesteld. Deze nieuwe functie die de wiskunde te vervullen kreeg noemen we Propaedeutische wiskunde, naar de functie die de wiskunde in het technisch hoger onderwijs vervulde. 's Ochtends zullen publieke voordrachten worden verzorgd; 's middags zijn werkbesprekingen gepland.

Kosten:

f 75,- per deelnemer (excl. verblijfskosten),
korting voor studenten.

Inlichtingen:

Danny Beckers / Gerard Alberts
ift W&S, Th.v.A. 3.01.23
Postbus 9108
6500 HK Nijmegen
tel. 024-3615986
e-mail: d=beckers%bw%kun@vines.uci.kun.nl

Inhoud

Rectificatie

In nummer 6 zijn een paar foutjes geslopen:

op bladzijde 194 moet in de 6de regel van de berekening *OD* staan i.p.v. *OZ*;

op bladzijde 200 had boven de derde kolom 'Aankondiging' moeten staan i.p.v. 'Aanvulling'.

Examenbesprekingen wiskunde mei 1996

Wederom vond het bestuur van de NVvW vele collega's bereid één of meer regionale examenbesprekingen te leiden, waarvoor op deze plaats dank.
Niet overal is de bespreking op dezelfde plaats als vorig jaar.

VBO/MAVO C/D maandag 20 mei 1996 van 16.30 - 18.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR OSG Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-5122477	C: Hr. T.L.J. Dunselman 075-6284042 D: Mw. C.E. Gaykema 020-6131802
GRONINGEN Zernike College Bordewijklaan 34 050-5266866 *(Station bus lijn 5)*	C: Hr. S.A.K. Kooiman 050-5251289 D: Hr. J. Rijnaard 050-5254709
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. Terborchstraat 1 073-6442929 *(NS Den Bosch OOST)*	C: Hr. P. van Seeters 013-5344530 D: Hr. P. van Seeters
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	C: Hr. W. de Jager 0184-683829 D: Hr. W. de Jager
ZEIST Kath. SG De Breul Arnhemsebovenweg 98 030-6915604 *(NS Driebergen-Zeist)*	C: Hr. R.J. Roukema 0346-560429 D: Hr. R.J. Roukema
ZWOLLE Thorbecke SG Dr. van Heesweg 1 038-4546677	C: Mw. A. Wajer-de Graauw 0341-262445 D: Mw. A. Wajer-de Graauw

HAVO-A dinsdag 14 mei 1996 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT SG Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. P.G.M. Kop 0172-614082
AMSTERDAM C.S.G. Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(Tramln. 2; 3; 5; 12; 16; 24)*	Hr. S.T. Min 0229-237756 **Parkeerautomaten!**
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 026-4423028	Mw. M.M. Knops-Gianotten 0468-413814
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Hr. A. Ruijgt 0113-343963
's-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Hr. J.P.C. van der Meer
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5421000	Hr. L. Tolboom 050-3146093
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. Terborchstraat 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. H.J. Kruisselbrink. 073-5216386
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. R.E. Houweling 0180-315302
ZWOLLE V.d.Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. J.Th.J. Mahieu 038-4540414

HAVO-B vrijdag 24 mei 1996 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleiders*
AMERSFOORT SG Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. F.W. Zwagers 033-4752341
AMSTERDAM C.S.G. Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(Tramln. 2; 3; 5; 12; 16; 24)*	Hr. G.W. Fokkens 020-6438447 **Parkeerautomaten!**
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 026-4423028	Hr. A.T. Sterk 055-3666466
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Hr. B. Dorssers 0113-230350
’s-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Hr. H.P. v.d. Hoeven 079-3621253
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5421000	Hr. J. Tolboom 050-3129436
’s-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. Terborchstraat 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. C.J.M. Nienhuis 0411-678501
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. B.L.G.P. Hillebrand 0180-515210
ZWOLLE V.d. Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. J.P. Scholten 053-4768791

VWO-A dinsdag 14 mei 1996 van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT SG Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. P.G.M. Kop 0172-614082
AMSTERDAM C.S.G. Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(Tramln. 2; 3; 5; 12; 16; 24)*	Hr. J.P. Muthert 020-6253065 **Parkeerautomaten!**
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 026-4423028	Mw. E.M.H. v.d.Berg-de Both 024-3551414
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Mw. L. de Bokx 0118-638551
’s-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Mw. M.P. Kollenveld 070-3904867
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5421000	Hr. J. Tolboom 050-3129436
’s-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. Terborchstraat 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. W.J.M. Laaper 040-2867720
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. C. Rijke 078-6194286
ZWOLLE V.d. Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. W.J. Kooiman 0529-432099

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

VWO-B vrijdag 24 mei 1996 van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT SG Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. M.J.F.M. Voorhoeve 030-2936166
AMSTERDAM C.S.G. Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(Tramln. 2; 3; 5; 12; 16; 24)*	Hr. A. Holleman 0251-654913 **Parkeerautomaten!**
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 026-4423028	Hr. A.T. Sterk 055-3666466
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Hr. P.C. Huysse 0187-489558
's-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Hr. R. Klinkenberg 070-3559938
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5421000	Mw. H. Lüder 050-5340695
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. Terborchstraat 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. A.L.P. van Merode 0162-313746
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. H.R.K.T. Hillebrand 0180-523552
ZWOLLE V.d. Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. J.Th.J. Mahieu 038-4540414

Reactie

5 februari 1996.

Geachte Redactie,
In Euclides nr. 3 van de huidige jaargang schrijft C.J. van de Giessen een uitvoerig, met **zeer goede** argumenten onderbouwd, artikel waarin hij kenbaar maakt waarom hij tegen invoering van de grafische rekenmachine is voor het vak wiskunde in de tweede fase.
De docenten wiskunde die in de bovenbouw van het Eckartcollege te Eindhoven lesgeven willen hierbij kenbaar maken dat zij het volkomen met de heer van de Giessen eens zijn.
Het geld dat nu besteed wordt aan cursussen om docenten met de grafische machine te leren werken, kan dan ook beter besteed worden aan cursussen om b.v. de **computer** in de wiskundeles te leren integreren.
Wij roepen alle docenten wiskunde in Nederland die lesgeven in de bovenbouw op, adhesie te betuigen aan de heer van de Giessen. Dit kan men b.v. doen door een briefje aan de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te sturen met daarin de slotzin van het artikel van de heer van de Giessen: **'Weg met de grafische rekenmachine!'**

Hoogachtend,

F. Borghouts
A. Bos
M. v. Dooremalen
J. Dierick
H. v. Haendel
H. Jakobs
J. Houwen (sectievoorzitter)

Eckartcollege
Damocleslaan 3
5631 KC Eindhoven

P.S.:
Wij hebben ook een brief gestuurd aan het bestuur van de NVvW, waarin wij het bestuur verzoeken om alles in het werk te stellen om de Vakontwikkelgroep Wiskunde te doen inzien dat het werken met de grafische rekenmachine uit het programma voor de tweede fase dient te worden geschrapt.

Aankondiging

Junior Mathematical Congress '96
Miskolc, Hungary
29 July to 2 August
at the University of Miskolc

The Junior Mathematical Congress '96 is one of the official satellitemeetings of the 2-nd European Congress of Mathematics, and is aimed at bringing together the future mathematicians of Europe. We welcome young people (preferable high-school aged or close to) interested in Mathematics at this venue. The official languages of the congress are English and Hungarian. Contributions in Hungarian will be translated into English; we also welcome contributions in any other language if supported by an English translation.

About the programm

Apart from attending lectures given by invited scholars and meeting famous European mathematicians, the participants may themselves give talks or exhibit posters.
In addition to the new ideas, those present will become acquainted with yet unknown branches and applications of mathematics as well as educational software and logical games. The difference of age and mathematical background of the participants will be taken in consideration in organizing the lectures and the presentation of contributions at three different levels:

1 General - accessible for all participants,
2 Special Mathematics - accessible for high school students with special interest for Mathematics,
3 Young Mathematicians - for those who will present their own results in a given domain of Mathematics.

Applicants forms and more information are available from:

Dr. Peter Kortesi (Chairman)
Miskolc, H-3515, PF.10
Hungary
phone: 36-46-365111 extension 1795
fax: 36-46-365174
e-mail: matjun@gold.uni-miskolc.hu
or: peterk@dcs.st-and.ac.uk

Dr. Zs. Ruttkay (Scientific and International Com. member)
Fac. der Wiskunde en Informatica,
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
tel: 020-444 7776
fax: 444 7653
e-mail: zsofit@cs.vu.nl

Mededeling

Vierkant wiskunde zomerkampen 1996

Puzzels, denkspelletjes, wiskunst

Vierkant organiseert in 1996 al voor het derde jaar zomerkampen voor 12-16-jarige jongeren, die het leuk vinden hun hersens te laten kraken! Diverse wiskundige activiteiten worden aangevuld met lezingen, spelletjes en sport.

Tijden:
kamp B van 19 augustus t/m 23 augustus, met hetzelfde programma als kamp B in 1995,
kamp C van 12 augustus t/m 16 augustus, met een nieuw programma.
Een derde kamp in het Noorden met programma A (hetzelfde als in 1995) is nog in voorbereiding.

Verdere *informatie* en *aanmeldingsformulieren* zijn te verkrijgen bij het Vierkant secretariaat:

Zsófia Ruttkay
Faculteit der Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit Amsterdam
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
tel: 020-444 7776
e-mail: vierkant@cs.vu.nl

Boekbespreking

J.C. Perrenet
Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs: samen of alleen? Onderzoek van wiskunde leren bij 12- tot 16-jarigen.
Proefschrift.

Vooraf
Op 3 maart 1995 promoveerde aan de Rijksuniversiteit Limburg Jacob Perrenet op een proefschrift met bovenvermelde titel. De centrale vraag van zijn onderzoek luidt:
Wordt probleemoplossen in de wiskunde beter samen of beter individueel geleerd?
De auteur gaat ook in op de kloof die er volgens hem bestaat tussen de onderwijskundigen enerzijds en de wiskundedidactici anderzijds. Gezien zijn achtergrond, hij is zowel wiskundig als onderwijspsychologisch opgeleid, is het niet vreemd dat hij hieraan aandacht besteedt.
Die kloof is voor hem vooral van methodologische aard. Vakdidactici werken liever niet met streng statistisch gecontroleerde experimenten in een grootschalige opzet, onderwijspsychologen wel. De didactici voelen meer voor een wat zachtere aanpak: het zogeheten ontwikkelingsonderzoek. Bij dergelijk onderzoek wordt lesmateriaal ontworpen en in een (meestal kleine) groep leerlingen uitgeprobeerd. Daarbij wordt goed gekeken hoe die erop reageert, en met de kennis die dit oplevert wordt een verbeterde versie van het materiaal gemaakt.
Perrenet beargumenteert dat er door een goede samenwerking tussen beide groepen verbeteringen in het wiskundeonderwijs tot stand kunnen worden gebracht. Hij geeft aan dat het een en ander moet gebeuren: de afzonderlijke onderzoeksmethoden zullen gecombineerd moeten worden, en er zal een gemeenschappelijke theorie ontwikkeld moeten worden. En dan moet er veel onderling gecommuniceerd worden: in elkaars tijdschriften publiceren, gemeenschappelijke conferenties houden, en vooral projecten samen doen met een goede mix van beide soorten onderzoekers.
De auteur geeft toe dat zijn eigen onderzoek maar gedeeltelijk aan deze criteria voldoet.

Het kader
Perrenet heeft geprobeerd gebruik te maken van èn de vakdidactiek èn de cognitieve onderwijspsychologie, maar vooral van de laatste.
Hij merkt hierbij op dat ook vakdidactici als Skemp, Freudenthal en Van Hiele in hun benadering tegen de cognitieve onderwijspsychologie aanzaten, want ze hadden veel aandacht voor de denkprocessen van de leerlingen. Hij zet hij zich dan ook af tegen Freudenthal die wat onderwijskundigen doen heeft getypeerd als het maken van lege dozen.
De vraag is nu: geldt een dergelijke typering ook voor dit boek? Mijn antwoord is nee. Het boek is een goed leesbaar verhaal geworden. Er worden veel praktijksituaties beschreven en indringend geanalyseerd, zodat het voor wiskundedocenten herkenbaar is. De conclusies zijn niet alleen voor de vakdidactici of onderwijskundigen interessant maar ook voor de lespraktijk van belang.

De kern
De kern van het boek wordt gevormd door zes al eerder door de auteur (alleen of met anderen) gepubliceerde artikelen, waarin verslag van onderzoeken wordt gedaan.
Perrenet definieert als groepswerk de situatie waarbij in groepjes van drie tot zes leerlingen wordt samengewerkt met daartoe ontwikkeld materiaal. Het gaat in de artikelen om de volgende onderwerpen.
1 Het analyseren van fouten van leerlingen bij het oplossen van elementaire algebra-problemen en de invloed van groepswerk op het oplossen.
2 De kunst van het controleren: een nadere analyse van de fouten die leerlingen maken bij het controleren van de oplossing van lineaire vergelijkingen.
3 Als (1), maar nu voor meetkundeopgaven.
4 De invloed van het leerboek op het maken van specifieke fouten bij wiskundeproblemen. Dit onderzoek heeft nog tot een discussie in Euclides geleid tussen de auteur en Van Streun, zie Euclides 66, blz. 55-60 en Euclides 67, blz. 153-156. Over de hierbij gebruikte transfertest is ook in Euclides gerapporteerd: Euclides 61, blz. 137-144, Euclides 63, blz. 43-50 en Euclides 65, blz. 174-180.
5 Het gebruik van groepsopgaven bij wiskunde met resultaten van het zgn. Adaptief Groepsonderwijs voor 12- tot 16-jarigen.
6 Het onderzoek naar de optimale hint om een leerling die met een opgave vastzit op weg te helpen.
Achteraf heeft Perrenet deze onderzoeken geplaatst in het kader van de genoemde hoofdvraag, waaraan hij drie aspecten onderscheidt:
- *Metacognitie*; gedefinieerd als de kennis van de probleemoplosser van het eigen oplosgedrag en de regulering daarvan.
- *Wiskundetaal*; kennis van de betekenis van de woorden, (vak)termen, notaties en begrippen is een voorwaarde voor het oplossen van wiskundige problemen.
- *Probleemkenmerken*; Perrenet onderscheidt bij wiskundige problemen drie hoofdkenmerken:
1 het gebruiken van kennis,

2 het toepassen van heuristische methoden,
3 de complexiteit.

Een aantal resultaten
De auteur komt tot de volgende bevindingen bij de drie genoemde hoofdkenmerken.
Metacognitie
Het metacognitief niveau van een leerling hangt samen met de kwaliteit van diens manier van probleemoplossen. Deze kwaliteit wordt bepaald door zaken als het vinden van het goede antwoord en het controleren daarvan. Verder vindt hij, wat ook anderen al gevonden hebben, dat groepswerk het metacognitief niveau positief beïnvloedt. Want, metacognitie ontwikkelt zich door het je eigen maken van zaken die je in de interactie tijdens het groepswerk geleerd hebt, omdat je in de discussie gedwongen wordt je denkwijzen en strategieën te formuleren en aan verificatie te onderwerpen.
Wiskundetaal
Hoewel nog weinig onderzocht wijzen de onderzoeksresultaten in een richting dat groepswerk een positieve invloed heeft op het wiskundige taalgebruik.
Probleemkenmerken
Voor individueel werken lenen zich eerder gesloten opgaven, die op de rij af doorgewerkt worden, terwijl bij groepswerk open problemen (niet noodzakelijk in een context!) zich beter lenen. Deze worden na verdeling binnen de groep parallel gemaakt en vervolgens in de groep bediscussieerd. Bij individueel werken zijn concrete, inhoudelijke aanwijzingen op hun plaats, bij groepswerk eerder aanwijzingen over hoe er samengewerkt kan worden, bijvoorbeeld over het verdelen van het werk. Dit betekent dat standaardopgaven beter individueel, en opgaven waarbij bestaande kennis en vaardigheden in een nieuwe situatie gebruikt moet worden (Perrenet spreekt van transferopgaven) beter in groepswerk gemaakt kunnen worden.
Maar het boek maakt niet duidelijk of groepswerk nu ook een positieve bijdrage levert aan het leren (individueel) probleemoplossen.

Aanbevelingen
Op grond van zijn bevindingen beveelt de auteur aan het groepswerk een grotere kans te geven. En verder beveelt hij samenwerking aan tussen wiskundedidactici en onderwijskundigen, maar deze aanbeveling is niet op een van zijn onderzoeken gebaseerd.

Achteraf
Over de gevolgde methode, promoveren op een serie artikelen, valt veel te zeggen. Hier kan ik volstaan met deze opmerking: het lezen van de artikelen vanuit het oogpunt *individueel werken versus groepswerk* is redelijk goed te doen, maar af en toe is de rode draad wat zoek. Perrenet's onderzoek geeft steun aan de gedachte dat groepswerk voordelen heeft boven individueel werken. Dit geldt met name bij de ontwikkeling van wiskundetaal en metacognitie, en bij bepaalde soorten problemen. Hoe groepswerk eruit kan zien blijft wat onder de oppervlakte, al zijn er verspreid wel suggesties.
Niet duidelijk wordt waarom er voor de aspecten metacognitie en wiskundetaal is gekozen, het aspect probleemkenmerken ligt voor de hand. Zijn metacognitie en wiskundetaal gekozen om zowel een onderwijskundig als een vakdidactisch aspect te hebben? Wat mij betreft hadden er meer wiskundig-inhoudelijke of -didactische zaken bij betrokken mogen worden, zoals: geldt de conclusie ook als het probleemoplossen betrekking heeft op redeneren of bewijzen, wat is de invloed van meer of beter gestructureerde wiskundekennis, van oefening en ervaring op wiskundig probleemoplossen, en zijn er heuristische methoden die speciaal van belang zijn?

Bert Zwaneveld

Overlijdensbericht

Bij het ter perse gaan van dit nummer bereikte ons het trieste bericht dat
Jan Breeman,
lid van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, overleden is.
Binnenkort zullen we een In Memoriam plaatsen.

De redactie.

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt 3 × 54 = 162 regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier 2 × 54 = 108 regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Adressen van auteurs

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

J.G.M. Donkers
TU Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

W. van Dijk
Oosterlicht College
Postbus 475
3430 AL Nieuwegein

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

W. Loeve
NLR
Postbus 90502
1006 BM Amsterdam

J.P. Muthert
Sweelinck College
Moreelsestraat 21
1071 BJ Amsterdam

S.H. Schaafsma
Betuwepad 25
5691 LM Son

I.H. Stamhuis
VAV, fac. N&S, VU
De Boelelaan 1081
1081 HV Amsterdam

A. van Streun
RUG, vakgroep wiskunde
Postbus 800
9700 AV Groningen

R. Tijdeman
Wiskunde RUL
Postbus 9512
2300 Leiden

Kalender

14, 20, 24 mei 1996
Diverse plaatsen

Examenbesprekingen
(zie bladzijde 232 e.v.)

22 mei 1996
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

1 juni 1996
Utrecht

Symposium Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
(zie Euclides 71-6, pag. 200)

19 juni 1996
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

26, 27 en 28 juni 1996
Nijmegen

Workshop 'Propaedeutische wiskunde' in de 19e eeuw (zie bladzijde 231)

13 september 1996
Eindhoven

Tweede ronde Wiskunde Olympiade in de TU

16 november 1996
Bilthoven

Jaarvergadering/studiedag NVvW

Pythagoras zoekt nieuwe redactie-leden!



Het wiskundetijdschrift Pythagoras is voor de meesten van u een oude bekende. Jarenlang was het een veelgebruikt leermiddel. De laatste jaren is het blad echter wat verwijderd geraakt van de bovenbouw havo/vwo. Daar willen we nu wat aan gaan doen. Om Pythagoras weer helemaal aan te laten sluiten bij de huidige (en toekomstige) onderwijspraktijk, zoeken we enthousiaste docenten die zin hebben redactielid te worden. Met hen willen we praten over een nieuwe opzet voor het tijdschrift.

Verder zoeken we docenten die interessante artikelen en/of vraagstukken hebben gemaakt. Heeft u een speciale les samengesteld? Stuur hem in en wie weet vindt u hem terug in de vernieuwde Pythagoras!

Heeft u belangstelling voor een plaats in de redactie? Bel met Ilma Merx (070-3143500)
Heeft u interessante artikelen en/of vraagstukken? Stuur ze naar:
Pythagoras, p/a NIAM, Neuhuyskade 94,
2596 XM Den Haag, t.a.v. Ilma Merx

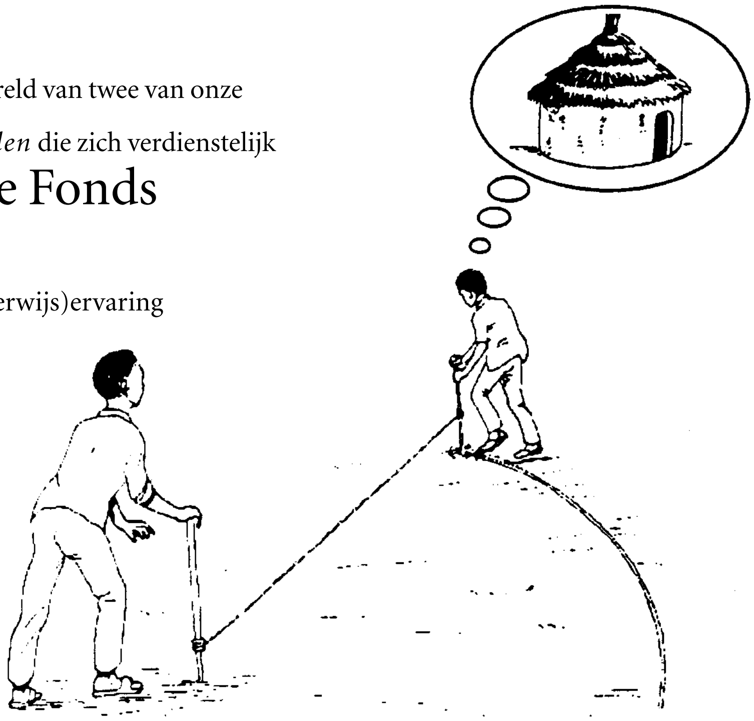
OPROEP

Vanwege het verblijf in c.q. vertrek naar de Derde Wereld van twee van onze werkgroepleden zoeken wij *enthousiaste NVvW-leden* die zich verdienstelijk willen maken voor het Wereldwiskunde Fonds (voorheen het Derde-Wereld-fonds).

De voorkeur gaat uit naar mensen die (wiskundeonderwijs)ervaring hebben in de Derde Wereld.

De werkzaamheden blijven beperkt tot maximaal een dag per maand.

Gemaakte onkosten worden vergoed.



Geïnteresseerden kunnen contact opnemen met
Ruud Jongeling telefoon 0113-344548

Vierkantsvergelijkingen via ontbinden in factoren

Leon van den Broek

Inleiding

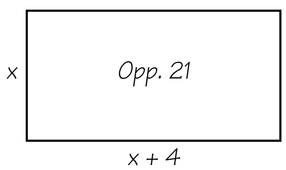
Elke leerling krijgt in het wiskunde-onderwijs vroeg of laat te maken met het oplossen van vierkantsvergelijkingen. Voor zover ik weet presenteren alle Nederlandse wiskunde-methoden de algoritme *op nul herleiden* → *ontbinden in factoren* → *antwoorden geven*. Mijn ervaring is dat deze steeds slechter door de leerlingen begrepen (of liever geaccepteerd) wordt. Waarschijnlijk komt dat doordat het huidige wiskunde-onderwijs meer toepassingsgericht en concreet is; de leerling is dus minder gewend (of geneigd) algoritmisch (formeel-technisch) te werken. Dus ben ik over de traditionele aanpak van het oplossen van vierkantsvergelijkingen via ontbinden in factoren gaan nadenken.

Bedenkingen tegen de traditionele aanpak

1 Je kunt er geen plaatje bij maken. (Dat kan weer wel bij de algemene oplossingsmethode via kwadraatafsplitsen.)
2 De benadering is formeel. Voor een tweedeklas-leerling is dat een nieuwe manier van wiskunde doen.
3 De aanpak is niet natuurlijk: geen leerling zou de aanpak zelf kunnen verzinnen.
4 Voor toepassingen is de traditionele aanpak een geforceerde omweg.

De traditionele algoritme is een geforceerde omweg

De volgende opgave is standaard; allerlei fraaie contexten komen vaak op deze opgave neer.
Van een rechthoek is de oppervlakte 21 m^2; de rechthoek is 4 meter langer dan breed. Wat zijn de afmetingen van de rechthoek ?



We bekijken de volledige uitwerking via de traditionele aanpak.

Traditioneel
Noem de breedte x (m) , dan is de lengte $x + 4$.
$x \cdot (x+4) = 21$
$x^2 + 4x = 21$
$x^2 + 4x - 21 = 0$
$(x + 7)(x - 3) = 0$
$x = -7$ *of* $x = 3$
-7 kan niet uit praktische overwegingen. Dus meet de rechthoek 3 bij 7 meter.

Hierin wordt een vergelijking opgesteld. Deze wordt herschreven en op nul herleid; het linkerlid wordt ontbonden. We vinden twee oplossingen, waarvan er één vervalt. Om te ontbinden moet je twee getallen zoeken met produkt 21 en verschil 4. Maar dit laatste was nu precies de vraag die in het begin gesteld was! Ik had dus net zo goed (beter!) meteen het antwoord kunnen geven. Dus zo:

Alternatief
Noem de breedte x (m), dan is de lengte $x + 4$,
$x \cdot (x + 4) = 21$
$3 \cdot 7 = 21$
De rechthoek meet dus 3 bij 7 meter.

Deze alternatieve aanpak is *wel* natuurlijk. Elke toepassing die met een vierkantsvergelijking traditioneel kan worden opgelost, kan gemakkelijker op deze manier direct worden opgelost. Voor mij was deze ontdekking nogal schokkend. Nooit heeft iemand mij hierop gewezen, geen leerling en geen collega.

Bij kale vergelijkingen werkt de alternatieve aanpak ook (alleen is een eventueel negatief antwoord wat lastiger te vinden). Als voorbeeld lossen we de vergelijking: $x^2 = 6x + 27$ volgens beide aanpakken op.

Traditioneel
$x^2 = 6x + 27$
$x^2 - 6x - 27 = 0$
$(x - 9)(x + 3) = 0$
$x = 9$ *of* $x = -3$

Alternatief
$x^2 = 6x + 27$
$x^2 - 6x = 27$
$x(x - 6) = 27$
$x = -3$ *of* $x = 9$

In de traditionele aanpak moet -27 ontbonden worden in twee factoren waarvan de som -6 is. In mijn alternatieve aanpak moet 27 ontbonden worden in twee factoren waarvan het verschil 6 is.

Overwegingen

1 Leerlingen zouden vierkantsvergelijkingen eerst op de alternatieve manier moeten oplossen; gesteund door oppervlakte-plaatjes. Daarbij zou in eerste instantie volstaan kunnen worden met positieve oplossingen. Later kan dan eventueel de traditionele aanpak worden aangeboden.
2 Een vergelijking als $x^2 = 36$ los je niet op via ontbinden in factoren, maar je geeft meteen de oplossingen. Daarbij sluit de alternatieve aanpak aan.
3 Ontbinden in factoren is op zich nuttig, bijvoorbeeld in de getaltheorie.
4 De stelling ‘een produkt is nul dan en slechts dan als ten minste een van de factoren nul is’ is op zich eveneens nuttig.
5 Een voordeel van de traditionele aanpak is dat je daarbij zeker weet dat je *alle* oplossingen hebt. Dat is bij de alternatieve aanpak niet altijd even duidelijk.
6 Later in klas 3 of 4 worden vierkantsvergelijkingen systematisch via kwadraatafsplitsen opgelost.

Brief aan de Minister

Aan:
De Minister van Onderwijs & Wetenschappen
De Staatssecretaris van (Voortgezet) Onderwijs
De onderwijs-specialisten van de Eerste & Tweede Kamer
De Stuurgroep Profiel Tweede Fase / Vakontwikkelgroep wiskunde.

Amsterdam, januari 1996

Mevrouw, mijnheer,

Een vernieuwing van het onderwijs van het kaliber van de *Tweede Fase HAVO/VWO* heeft alleen kans van slagen indien voldoende zorgvuldigheid in acht wordt genomen. Veel tijdrovende voorbereidingen moeten nog worden getroffen, zoals:
- het vervaardigen van trajectenboeken ;
- het schrijven van nieuwe leerboeken;
- de keuze van leerboeken door de scholen;
- voorbereiding door docenten (o.a.: nascholing).

Bij de voorbereiding van de invoering van de *Tweede Fase in het HAVO en VWO*, heeft het er alle schijn van dat men zich deze voorbereidingen onvoldoende realiseert. Dat leiden wij af uit de beoogde *datum van invoering: 1998* !
Aan deze invoeringsdatum kleven de volgende bezwaren:

1. De eerste generatie leerlingen met basisvorming in hun bagage bereikt in 1996 de bovenbouw HAVO/VWO. Dat vereist *nieuwe leerboeken* voor 4 VWO en 4 en 5 HAVO, die slechts twee jaar kunnen worden gebruikt.

2. In 1998 vereist de Tweede Fase wederom *nieuwe leerboeken* in de bovenbouw HAVO/VWO; in de profielen moeten immers tal van nieuwe onderwerpen worden behandeld.

3. Het is *niet realistisch* om te veronderstellen dat de leerboeken voor de Tweede Fase *tijdig* - (een half jaar tevoren) - beschikbaar zullen zijn, tenzij enorme concessies worden gedaan aan de zorgvuldigheid.
NB: de leerstofbeschrijvingen voor de verschillende profielen moeten nu nog worden vastgesteld! Het onderwijs is niet gediend met overhaaste schrijverij van leerboeken en met onvoldoend voorbereide docenten.

Wij vragen U dan ook met klem de beoogde invoeringsdatum van de Tweede Fase (1998) te heroverwegen. *Uitstel tot het jaar 2000* geeft docenten, scholen en uitgeverijen een grotere kans om van de Tweede Fase een groot succes te maken.

Graag vernemen wij Uw reactie.

Namens de sectie wiskunde van het Sweelinck College,
drs. J.P. Muthert
drs. A.F. Bervoets

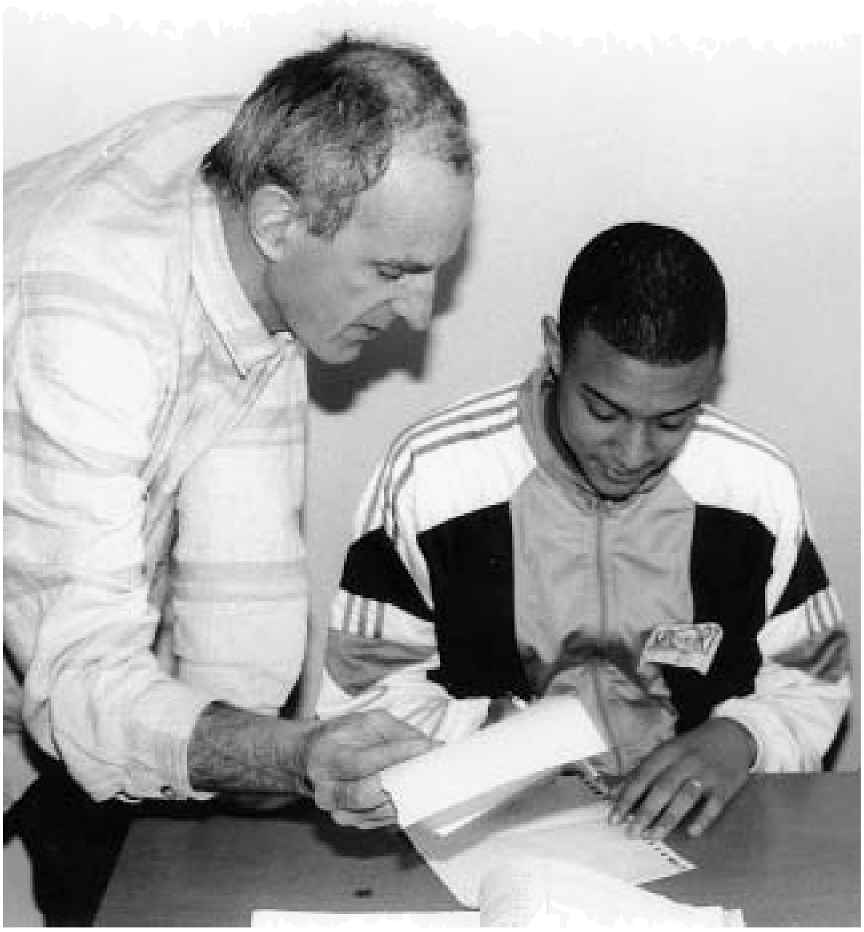
INTERVIEW

'Het is heel raar dat de MTS-wiskunde zo formeel is gebleven'

Martinus van Hoorn

Michel van Glabbeek, 44 jaar, is sinds 1983 MTS-leraar te Amsterdam, oorspronkelijk aan de Gijsbrecht van Amstel-MTS; deze is thans onderdeel van het Europa College voor Middelbaar Beroepsonderwijs.

Michel van Glabbeek heeft zelf aan een HTS en vervolgens aan de TH (nu TU) Delft bouwkunde gestudeerd; daarna haalde hij zijn tweedegraads bevoegdheid (MO-A) door bij de Haagse Leergangen een studie bedrijfswiskunde te volgen.



Waarom wilde je leraar worden?
Interesse. Je wilt natuurlijk ook werken. Omgaan met jongeren heb ik altijd leuk gevonden. Jarenlang ben ik vrijwilliger geweest bij een jongerencentrum. En ik vond het prettig om wat ik leerde in bijlessen over te brengen.

Was het lesgeven in 1983 anders dan nu?
Ik heb het zelf anders gemaakt. Ik heb de volgende werkwijze: eerst een instapprobleem, dan de theorie en/of een algoritme, en daarna de toepassing.
Het leerplan is niet veranderd, maar ik heb zelf de leerstof veranderd. Onderwerpen als verzamelingen, en wortelvormen verdrijven uit de noemer heb ik eruit gegooid. De officiële leerstof was en is nog steeds wel heel erg formeel, wat voor de grootste groep MTS-leerlingen juist niet zou moeten. Ze moeten zien wat ze ermee kunnen. De vraag: 'waar heb je wiskunde voor nodig?' komt bij mij niet meer voor.

Is nu de voorbereiding op de HTS niet in het gedrang gekomen?
Dat valt wel mee. Mijn leerlingen scoren zeker niet slechter bij het examen dan leerlingen van andere scholen. Zo'n 30 % van mijn MTS-leerlingen zit in de zgn. TT-stroom (TT = theoretisch-technisch) die nodig is voor doorstroming naar de HTS. Ook deze leerlingen moeten problemen kunnen oplossen.

Is dat ook een verschil, die nadruk op problemen oplossen?
Ja. Het leuke van de wiskunde in het MTO zou moeten zijn dat leerlingen problemen te lijf gaan. Dat kunnen ze vaak beter dan velen denken.
Dit, het problemen oplossen, begint in de techniek ook te komen.

Welke veranderingen zijn er?
Het gaat nog niet zo hard met de veranderingen. Het is heel raar dat de MTS-wiskunde zo formeel is gebleven.

In 1997 komen de eerste leerlingen die in het mavo of vbo opgeleid zijn volgens het nieuwe programma.
De MTS-en zijn daar niet op voorbereid. Gemiddeld wordt nog weinig met contexten gewerkt. Bij bouwkunde wordt geprobeerd de leerstof in geïntegreerde blokken aan te bieden, daar ligt een begin. Voor het overige zijn er alleen niet-inhoudelijke



veranderingen, zoals het moduleren van de leerstof.

Hoe heb je zelf meegedaan om vernieuwing van het programma te bevorderen?
Ik heb altijd gezocht naar mogelijkheden iets te doen. Ik was toehoorder bij de COW. In 1993 is het platform van MTS-leraren voor het eerst bijeen geweest, waar onder meer Jan de Lange en Henk van der Kooij aanwezig waren. Op dit moment is Hans Wisbrun op de SLO bezig met 'opleidingsafhankelijke' en ook '-onafhankelijke' modulen. Voorts wordt aan software gewerkt, door APS en ECC.
Verder is er een schakelmethode voor leerlingen die in hun vooropleiding onvoldoende wiskunde hebben gehad. Dit kwam vroeger niet voor, alleen leerlingen met C-niveau werden toegelaten. Voor natuurkunde is er nog niets. Sommige MTS'en hebben een schakeljaar.

Wil je dat nog even verklaren, dat woord 'opleidingsafhankelijk'?
Er zijn verschillende studierichtingen, zoals bouwkunde, elektrotechniek en werktuigbouwkunde. De leerlingen in deze studierichtingen krijgen verschillende modulen wiskunde, bijvoorbeeld goniometrische functies en complex rekenen voor elektrotechniek.

De leerlingen zijn natuurlijk veranderd. Wat is het verschil?
Er is in ruim 10 jaar heel veel veranderd. Het MTS-programma is blijkbaar niet zo aantrekkelijk meer. Daar ligt trouwens een reden om ermee aan de gang te gaan. In de lange opleidingen, d.w.z. in de 'traditionele' MTS, is de instroom behoorlijk afgenomen, althans in Amsterdam.
De leerlingen zijn prima, al is het ingangsniveau waarschijnlijk minder; de goede LTS-leerling is verdwenen. Ik denk dat de vorming van brede scholengemeenschappen daaraan heeft bijgedragen.

Wat vind je voor een leraar het belangrijkste?
Dus niet het klassikale lesgeven. Wel het begeleiden van de leerlingen, het hen helpen problemen te overwinnen. Het kan overal over gaan, het mogen logaritmen zijn, het mag ook gonio zijn. Als ze zien dat ze iets te lijf kunnen, groeit hun zelfvertrouwen, en daarmee ook hun enthousiasme.
Daar wil ik me voor inspannen.

Stelling: 'Het heeft meerwaarde om wiskundigen in een bedrijf of technologische instelling te concentreren in een afdeling. Wanneer ze worden toegevoegd aan verschillende afdelingen raken ze geïsoleerd.'

Stelling

De mening van **ir. W. Loeve**, hoofd van de afdeling Informatica van het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR):
'Een wiskundige is een specialist die kennis van wiskunde heeft en die heeft geleerd die kennis toe te passen.



Wiskunde is in de organisatie waar de wiskundige werkt meestal geen doel op zichzelf. Het gaat meestal om problemen waar andere specialisten het voortouw hebben bij de oplossing. Om zijn/haar werk te kunnen doen moet de wiskundige zich zo veel mogelijk ophouden in de omgeving van de niet-wiskundige specialisten die hij/zij moet ondersteunen. Anders raakt de wiskundige hopeloos geïsoleerd en zal ontdekken dat hem/haar steeds minder om een bijdrage wordt gevraagd.
Er zijn high-tech ontwikkelingen waarin er op elk moment in de tijd van de meest geavanceerde inzichten in bepaalde takken van de wiskunde en in andere wetenschappen gebruik gemaakt moet worden. Dit betekent meestal dat er ook met creativiteit kleine aanpassingen aan het beschikbare wiskunde-gereedschap moeten worden gemaakt om de toepassing samen met toepassingsspecialisten en andere ondersteunende specialisten te realiseren. Voorbeelden van grensverleggende, door internationale concurrentie opgejaagde high-tech ontwikkelingen zijn er helaas in Nederland niet zo veel. We moeten ze zoeken in ontwikkeling van produkten met hoge toegevoegde waarde. Daarbij moeten specialisten zich in interdisciplinaire projectgroepen concentreren op het oplossen van de problemen. Dat vraagt veel van de vakkennis van de specialisten. De opbouw van de vakkennis is niet het doel van de projectgroepen. Deze groepen verwachten dat de specialisten zich zelf in hun vak voldoende verder ontwikkelen. De ontwikkeling vergt een omgeving van soortgelijke specialisten.
Bovenstaande betekent dat bijvoorbeeld wiskundigen een 'thuisgroep' in de organisatie moeten hebben waarin nog meer wiskundigen te vinden zijn. De thuisgroep dient te worden geleid door iemand die er op creatieve wijze aan kan bijdragen dat de wiskunde-specialisten geschikt blijven om aan de grensverleggende werkzaamheden in de organisatie bij te dragen. De impulsen voor de richting waarin de wiskundigen zich dienen te ontwikkelen moeten komen uit de projectgroepen waarin de wiskundigen werken. Het succes van de wiskundigen in hun bijdragen in de projectgroepen dient te worden gebruikt als maat voor de hoeveelheid gelegenheid die de wiskundigen krijgen om aandacht aan hun vak als zodanig te besteden.
Het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium NLR heeft sinds de ontwikkeling van de toegepaste wiskunde een afdeling met wiskundigen. De huidige afdeling is zeer succesvol. Dit komt doordat de wiskundigen goed zijn in wiskunde en hebben geleerd samen te werken met andere specialisten. Essentieel is ook dat de zelf-genererende vliegtuigindustrie in Nederland voor voldoende high-tech uitdagingen zorgt. Het succes van de wiskundeafdeling kan behalve aan de werkzaamheden binnen het NLR en zelfstandig daar buiten, worden afgemeten aan het uitwaaieren van de medewerkers over Nederland.'

Noot

Uit: ITW-nieuws jaargang 5, nummer 2 (september 1995), met dank aan de auteur en aan de redactie van het ITW-nieuws.

Ingezonden brief

Het optimisme van Anne van Streun

W. van Dijk

In Euclides, jaargang 71, nr. 3, 1995-1996 nov./dec. schreef Anne van Streun een reactie op het voorstel examenprogramma's wiskunde in de profielen havo en vwo.

In het artikel van Van Streun wordt een poging gedaan de toekomstige situatie te vergelijken met de huidige situatie. Mij lijkt, dat Anne van Streun de toekomst te rooskleurig ziet.

Van Streun wil graag een vergelijking maken met de huidige situatie en schrijft dan:

'Om de omvang te kunnen vergelijken met de huidige situatie houd ik de officiële norm aan:
100 uur studielast komt overeen met 78 lesuren van 50 minuten.'
Einde citaat.

Helaas, deze zinsnede is niet in overeenstemming met de waarheid. Een officiële norm bestaat (nog) niet. In VVO-magazine 95-96 (periodiek van de Vereniging voor het management in het Voortgezet Onderwijs) nr. 2, bladzijde 34 t/m 37 heb ik al eens duidelijk gemaakt, dat een dergelijke omrekening gebruikt wordt voor onderzoek naar de betaalbaarheid van de profielstructuur.

De tweede-fase-school zal in dit autonome tijdperk ongetwijfeld vrij zijn om de hoeveelheid contacturen zelf te bepalen. Als daardoor verschillende soorten studiehuizen ontstaan is dat een schone zaak, zolang leerlingen in die studiehuizen met verschillende aantallen (al of niet verplichte?) lesuren maar aan een zeker kwaliteitsniveau voldoen. En nou maar hopen dat een initiatiefbeperkende CAO-afspraak niet toch weer voor een grijze worst zorgt.
Maar uitgaande van een studielast van 1600 uur per jaar zal duidelijk zijn, dat daarbij gedacht moet worden aan een verdeling over 40 weken.

In de brochure 'Examen in het studiehuis', van de Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs d.d. december 1995, lezen we op bladzijde 13: *…, zodat er ook in het examenjaar sprake is van een jaar waarin 'geleerd' wordt en een studielast van 1600 uur (inclusief toetsing) haalbaar is.*
Met andere woorden, we moeten ervan uitgaan, dat een omrekensom er ook in het examenjaar als volgt uitziet: 1600 uur studielast, verdeeld over 40 weken, geeft een studielast van 40 uur per week.
Vertaald naar lesuren geeft dit:
$40 \times 0{,}75 = 30$ lesuren.

Nemen we vervolgens een voorbeeld van Van Streun bij de kop. Als voor een wiskundeonderdeel een studielast van 160 uur staat, levert de vertaling naar lesuren een andere uitkomst dan Anne beschrijft. Immers, 160 uur studielast $= 160 \times 0{,}75 = 120$ (huidige) lesuren.
In één jaar komt dat op $120 : 40 = 3$ wekelijkse lesuren. Over twee jaar verdeeld, betekent het slechts $120 : 80 = 1{,}5$ lesuur.

En met deze berekeningswijze wordt het verhaal van Anne van Streun wel heel erg optimistisch. Graag doe ik mee aan een discussie met als uitkomst dat Van Streun gelijk krijgt, maar ik ben van mening dat ik vooralsnog voor mijn vingeroefeningen t.b.v. de schoolorganisatie uit moet gaan van de hiervoor beschreven rekenwijze.

Over de auteur

W. van Dijk is vestigingsleider havo/vwo van het Oosterlicht College in Nieuwegein.

Reactie

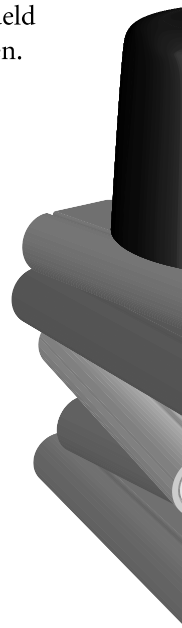
Papieren studiebelasting en de werkelijkheid

Anne van Streun

In het hoger en wetenschappelijk onderwijs is ruime ervaring opgedaan met studielastberekeningen en met het vertalen van zo'n jaarlast of een studiepunt (40 uur werk) naar een weeklast. Zelf schrijf ik het studieplan voor het eerstejaar van de wiskundestudie met netjes in het rooster aangegeven waar die 40 uur per week zijn terug te vinden in collegetijd, practica en zelfstudie. De werkelijkheid is natuurlijk dat er onder de studenten een grote spreiding is aan studiebelasting en dat het vreselijk moeilijk is om een bepaald vak niet zwaarder (of lichter) te laten worden dan het aantal studiebelastinguren (sbu's), dat er voor staat. Zoals we uit de recente ervaring met het nieuwe programma W12-16 weten, hangt de zwaarte van een nieuw examenprogramma in eerste uitvoering sterk af van de inschatting door auteursgroepen. In leerjaar 1 is het leerboek van methode X al 2 maanden voor de zomervakantie uit en in leerjaar 2 moet de wiskundesectie zeker een derde deel van leerboek Y schrappen om een uitvoerbaar programma over te houden. Toch beschikken die auteursgroepen over een grote praktijkdeskundigheid, maar het vooraf goed inschatten van de moeilijkheidsgraad en studiebelasting bij een nieuw programma is deksels lastig. De uitwerking van het nieuwe Tweede Fase programma door het PROFI-team in een trajectenboek moet dan ook zo grondig mogelijk op de haalbaarheid worden getoetst. Helaas lijkt er te weinig tijd te zijn voor een toetsing van het nieuwe programma in de dagelijkse lespraktijk.
Voorgaande overpeinzing brengt mij tot de conclusie dat al het rekenwerk aan studiebelasting maar betrekkelijke waarde heeft. Collega van Dijk betwist de door mij geciteerde norm uit een officieel onderzoeksrapport van de Stuurgroep, die vrij dicht ligt bij twee andere normen. Voor de vuist weg kan ik ook zonder een onderzoek wel een redelijke rekensom maken.

De jaarlast is vastgelegd:
1600 uur ∼ 30 lessen per week nu
Een jaar van 40 weken:
1200 lesuren of 100 sbu's per 75 lesuren of 80 minuten per lesuur

Het lijkt mij niet onredelijk dat per lesuur van 50 minuten nu een wiskundeleraar nog 30 minuten studietijd verwacht. De gebruikelijke 3 lesuur wiskunde per week in 4 vwo (nu de gemeenschappelijke wiskunde voor A en B) komt zo op 160 sbu's en de nieuwe gemeenschappelijke wiskunde in het vwo van 280 sbu's is daarom equivalent aan ruim 5 lesuren nu. En het eindniveau van die uitgebreide gemeenschappelijke wiskunde in 4 vwo dreigt beneden het eindniveau van de huidige wiskunde in 4 vwo terecht te komen. Dat geeft mij meer zorgen dan de rekenmodellen bij verschillende theoretische modelveronderstellingen! Overigens ben ik het met collega Van Dijk eens dat de vraag of je moet rekenen met 40 effectieve schoolweken voor een vak (die 40 heb je niet) of met 30 (zoals uitgevers vaak doen) tot forse verschillen kan leiden.
Mijn verwachting is dat de sbu's net als bij het hoger en universitair onderwijs gewoon verhoudingsgetallen worden en dat de kwaliteit van de school mede afhangt van de mate waarin de school er in slaagt de leerlingen inderdaad gemiddeld 40 uur per week te laten studeren.



Dupliek

Ik deel de mening dat het rekenwerk aan studiebelasting maar betrekkelijke waarde heeft. Maar aangezien de meeste Nederlandse docenten wiskunde (net als ik) nog leven in een stramien van 50-minuten-lessen, waarin erg veel gebeuren moet, zal de vertaling naar sbu's ons erg zwaar vallen. Ik heb geprobeerd aan te tonen, dat die vertaling wel eens anders zou kunnen verlopen dan de heer van Streun in zijn artikel beschreef.
De belangrijkste zin in de reactie van Van Streun is de laatste: hoe slaag je er als school in de leerlingen gemiddeld 40 uur per week te laten studeren?

W. van Dijk



40 jaar geleden

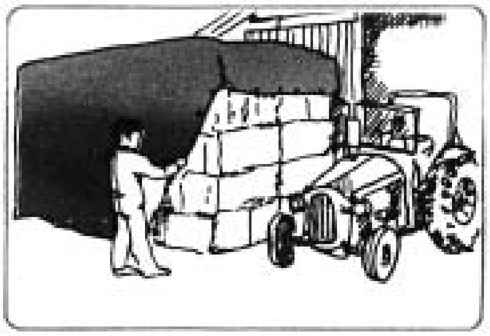
Notulen van de ledenvergadering van L.I.W.E.N.A.G.E.L.
op maandag 9 april 1956 te Amsterdam om 17.00 uur

De voorzitter opent de vergadering en heet de vertegenwoordigers van zusterverenigingen, het erelid Dr. Schrek, en de verdere leden, die de moed opbrengen om na een vermoeiend Congres nog een vergadering bij te wonen, hartelijk welkom.
De notulen worden ongewijzigd goedgekeurd.
Voor enkele mededelingen krijgt Dr. Vredenduin het woord. Het betreft in de eerste plaats de naamsverandering van Wimecos, waardoor gymnasiumleraren ook lid van deze vereniging kunnen worden.
Dr. Vredenduin legt er de nadruk op, dat Wimecos eerst overleg met Liwenagel heeft gepleegd en dat de wijziging in volle harmonie tot stand is gekomen.
De tweede mededeling betreft punt 4 van de agenda: de status van het blad 'Euclides'. De bedoeling is, dat Euclides voortaan 10 maal per jaar zal verschijnen en dat de redacteuren benoemd zullen worden door Wimecos en Liwenagel. De prijs zal dan voor leden van deze verenigingen *f* 5,- per jaar worden.
De voorzitter vraagt of iemand het woord verlangt over dit voorstel. Dit is niet het geval en het voorstel wordt aangenomen.
Voor de vacatures in het bestuur zijn geen tegenkandidaten gesteld, zodat Dr. Vredenduin als voorzitter en J. Willemse als bestuurslid verkozen verklaard worden.
Voorzitter Willemse bedankt Prof. Wielenga, die het bestuur gaat verlaten, voor het vele dat hij voor Liwenagel heeft gedaan en voor de prettige samenwerking in het bestuur.

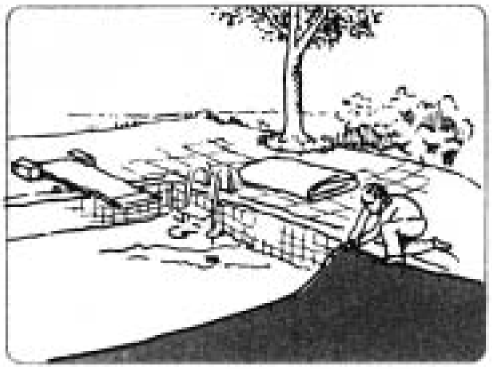
Uit: Euclides 31 (1955-1956).

Werkblad

Dekzeilen



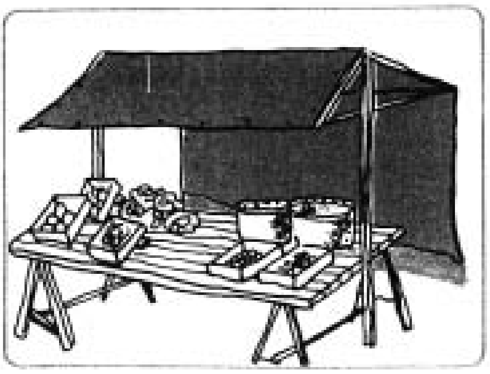
De firma SANTOS verkoopt dekzeilen van 4 x 6 meter.
Ze zijn waterdicht.
Er zitten ringen in zodat je er meerdere aan elkaar kunt gebruiken.



Ineke en Harold willen een paar dekzeilen kopen voor het zwembad bij hun camping. Dan waaien er geen bladeren in als het niet gebruikt wordt.
Het zwembad is 15 x 10 meter.

Om een dekzeil op de rand van het zwembad te kunnen vastmaken is 20 cm extra nodig.

6 Hoeveel dekzeilen moeten Ineke en Harold minstens kopen? Maak een tekening.



Hiernaast zie je hoe het dekzeil gebruikt wordt bij een marktkraam. Het zeil komt tot op de grond. De marktkoopman kan rechtop staan onder het dekzeil.

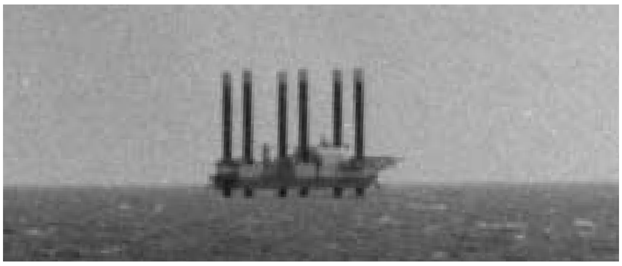
7 Heb je voor zo'n marktkraam aan één dekzeil voldoende? Maak zelf een schatting van de maten van de kraam.

Uit: experimenteel examen vbo-B, 1995

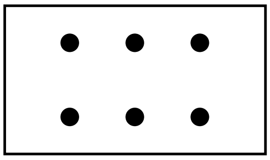
Werkblad

Booreiland

Vlakbij Texel ligt een booreiland in zee. Hiernaast zie je een foto van het booreiland. De foto is van veraf gemaakt want je kunt niet dichtbij het booreiland komen.



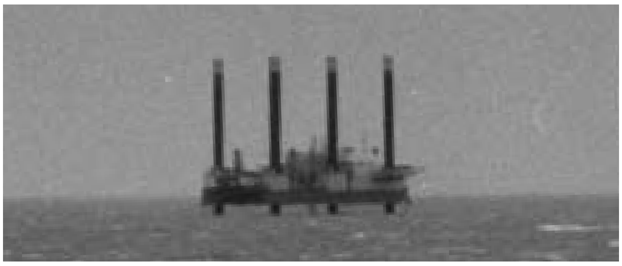
Het booreiland is rechthoekig en heeft zes ‘poten’ die op de bodem van de zee staan. De ‘poten’ steken boven het booreiland uit.
Schematisch ziet het er, van bovenaf gezien, zó uit:

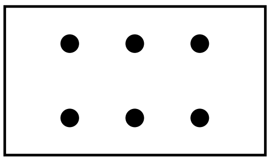


Stel je voor dat je met een boot in een grote boog rond het booreiland vaart. Je maakt een foto vanaf de boot.

13 Is het mogelijk om een foto te maken waarop het lijkt alsof het booreiland maar twee ‘poten’ heeft?
Je mag de tekening gebruiken om je antwoord uit te leggen.

Hiernaast zie je een andere foto van het booreiland. Je kunt maar vier ‘poten’ zien.
Daarbij is het bovenaanzicht nog eens getekend.





14 Geef in de tekening met een pijl aan vanuit welke richting de foto gemaakt kan zijn.

Stel je voor dat je eenmaal in een grote boog rond het eiland vaart.

15 Hoe vaak kun je een foto maken waarop vier ‘poten’ zichtbaar zijn?
Maak een tekening om je antwoord uit te leggen.

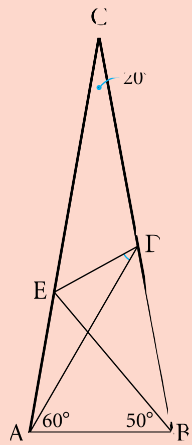
Uit: experimenteel examen vbo-B, 1995

Recreatie

Opgave 670

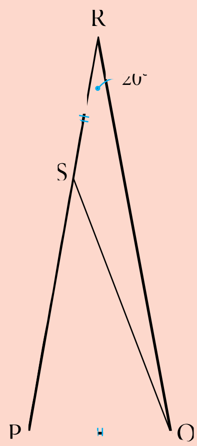
Op 2 en 3 februari 1996 vonden voor de tweede maal in Noordwijkerhout de *Nationale Wiskunde Dagen* plaats. Als 'puzzeldokter' had ondergetekende een puzzeltafel met een kleine tentoonstelling. Hierdoor kon ik vrij gemakkelijk kennis maken met verschillende lezers van deze rubriek. Ik kreeg ongeveer 15 onopgeloste puzzels onder ogen, die ik óf ter plaatse, óf bij thuiskomst kon oplossen.

Ook een oud meetkundeprobleem uit de jaren twintig circuleerde onder de bezoekers. Zelfs aan de eettafel werd over dit probleem gesproken. Na onderzoek blijkt dit probleem bedacht te zijn door de wiskundige E.M. Langley. Aangezien de tafelgenoten het een leuk probleem vonden en men (door de smakelijke rijsttafel?) niet zo snel een oplossing vond, wil ik u ook mee laten genieten.



Gegeven:
ΔABC
$AC = BC$
$\angle C = 20°$
$\angle BAD = 60°$
$\angle ABE = 50°$
Gevraagd:
$\angle ADE$ met behulp van vlakke meetkunde, dus geen goniometrie.

Aangezien u het bovenstaande probleem misschien al vaker bent tegengekomen en de oplossing onthouden hebt, heb ik voor u nog een wat minder bekende variant. Heel veel puzzelplezier!



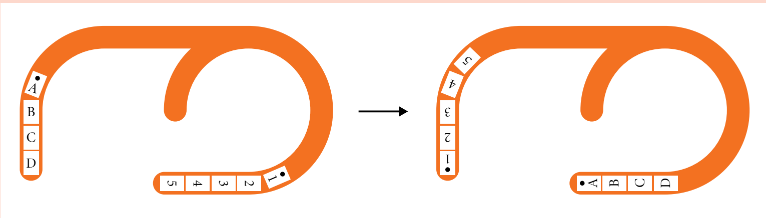
Gegeven:
ΔPQR
$PR = QR$
$\angle R = 20°$
$RS = PQ$
Gevraagd:
$\angle RQS$ met behulp van vlakke meetkunde, dus geen goniometrie.

Goede oplossingen, binnen één maand ingezonden, leveren maximaal 5 punten voor de ladderwedstrijd op.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

Oplossing 667

Er werd gezocht naar een oplossing van de Engelse rangeerpuzzel 'Chunnel Trouble?'. In Engeland (GB) staat de locomotief A met zijn wagons B, C en D. In Frankrijk (Fr) staat locomotief 1 met zijn wagons 2, 3, 4 en 5. Met behulp van het zijspoor (Z) moeten ze elkaar passeren.



Er kon als volgt gerangeerd worden:
1 naar Z
A met BCD naar Fr
1 naar Fr
1 met DCB naar GB
A naar Z
1 met DCB naar Fr
1 met DCB2345 naar GB
A via Fr naar GB
A met 5432B via Fr naar Z
A laat B in Z staan
A met 5432 via Fr naar GB
A via Fr naar Z
A met B via Fr naar GB
A met B5432C via Fr naar Z
A laat C in Z staan
A met B5432 via Fr naar GB
A met B via Fr naar Z
A met BC via Fr naar GB
A met BC5432D via Fr naar Z
A laat D in Z staan
A met BC5432 via Fr naar GB
A met BC via Fr naar Z
A met BCD naar Fr

Achteraf blijkt dat deze puzzel al in vele puzzelboeken voorkomt. Als oudste bron heb ik gevonden: 'Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums' (1914, Franklin Bigelow Corporation). Op bladzijde 89 staat dit probleem onder de titel 'Primitive railroading'.

Met 58 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:

Elias Buissant des Amorie
Molenweide 51
1902 CJ Castricum

Hartelijk gefeliciteerd.

▼ Vervolg van pag.230

INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE
Toronto 1995
Eerste dag, 19 juli

1 Vier punten A, B, C en D liggen in deze volgorde op één lijn. De cirkels met diameters AC, respectievelijk BD, snijden elkaar in de punten X en Y. De lijn XY snijdt de lijn BC in het punt Z. P is een van Z verschillend punt op de lijn XY. De lijn CP snijdt de cirkel met diameter AC in de punten C en M, de lijn BP snijdt de cirkel met diameter BD in de punten B en N. Bewijs dat de lijnen AM, DN en XY door één punt gaan.

2 a, b en c zijn positieve reële getallen waarvoor geldt: $abc = 1$.

Bewijs: $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$.

3 Bepaal alle gehele getallen $n > 3$ waarvoor er n punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in het vlak en ook reële getallen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ bestaan met de volgende twee eigenschappen:

(i) geen enkel drietal punten van $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ligt op één lijn,
(ii) voor elk drietal i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) is de oppervlakte van driehoek $A_iA_jA_k$ gelijk aan $r_i + r_j + r_k$.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur.
Voor elk probleem maximaal 7 punten.

INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE
Toronto 1995
Tweede dag 20 juli

4 Bepaal de grootste waarde van x_0 waarvoor er een rij van positieve reële getallen $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ bestaat met de volgende eigenschappen:

(i) $x_0 = x_{1995}$,

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ voor $i = 1,2,\ldots,1995$.

5 $ABCDEF$ is een convexe zeshoek met $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ en $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. G en H zijn twee inwendige punten van de zeshoek waarvoor geldt: $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$

Bewijs: $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

6 Zij p een oneven priemgetal.
Bepaal het aantal deelverzamelingen A van de verzameling $\{1,2,...,2p\}$ waarvoor geldt:

(i) A bevat precies p elementen,
(ii) de som van alle elementen in A is deelbaar door p.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur.
Voor elk probleem maximaal 7 punten.